ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

1) Una carga puntual positiva Q está en el centro de una capa conductora esférica con radio interior R_i y radio exterior R_o. Determine **E** y V como funciones de la distancia radial R.

2) Suponga un tubo de cobre muy largo con radio exterior de 3 cm y radio interior de 2 cm, que rodea una línea de carga de 60 pCm^{-1} situada en su eje. Calcular:

a) **E** en r=1 m, 2.5 cm y 1.5 cm.

b) La diferencia de potencial entre la superficie interior y la exterior del tubo.

3) Considere dos conductores esféricos con radios b_1 y b_2 ($b_2>b_1$), conectados por un alambre conductor. Se deposita una carga total Q en las esferas. La distancia entre los conductores es muy grande en comparación con los radios de las esferas, de modo que las cargas en los conductores esféricos se distribuyen uniformemente. Calcular las densidades de carga superficial y las intensidades de campo eléctrico en la superficie de las esferas.

4) Un cilindro conductor de radio R y longitud L, lleva una carga Q. Coaxialmente con él se disponen dos coronas cilíndricas conductoras. La primera, de radios R_1 y R_2, lleva la carga Q´, y la segunda, de radios R_3 y R_4, está conectada a tierra. Calcular:

a) la distribución de cargas y sus respectivas densidades.

b) el campo eléctrico en las distintas regiones del espacio (suponer los cilindros muy largos).

c) el potencial eléctrico en las distintas regiones del espacio.

5) Sea un conductor, en el que existe una cavidad interior, sometido a un campo eléctrico. Hallar el campo eléctrico existente en el interior de la cavidad así como la densidad de carga en la superficie de ésta.

6) Expresar la energía almacenada por varios conductores independientes entre sí.

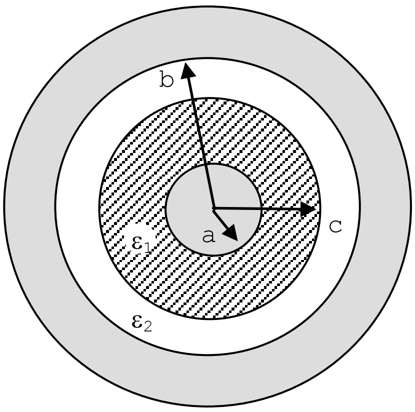
7) Una esfera conductora de radio R_1 y carga Q, se rodea de una corona esférica conductora concéntrica de radios R_2 y R_3, siendo $R_2<R_3$, y con carga 2Q. Calcular:

a) La distribución de cargas y el campo eléctrico en cada una de las regiones del espacio.

b) La diferencia de potencial entre la esfera y la corona esférica.

c) La capacidad entre la esfera y la corona esférica.

8) Un condensador cilíndrico consiste en un cilindro conductor interno de radio a y una corona cilíndrica externa coaxial de radio interior b. El espacio entre los dos conductores está lleno de un dieléctrico con permitividad ε y la longitud del condensador es L. Hallar la capacitancia del condensador.



9) Entre dos cilindros conductores coaxiales, de radios *a* y *b* (*b*=2*a*), se introducen dos capas de dieléctrico que llenan el espacio entre los conductores. El límite de separación entre los dieléctricos es la superficie cilíndrica de radio *c*, coaxial con los otros dos. Las permitividades respectivas de los dieléctricos son: $\varepsilon_1=4\varepsilon_o$ y ε_2. Si entre los conductores se aplica una tensión V_o:

a) calcular el valor de ε_2 para que el campo sobre la superficie del cilindro de radio *a* sea cuatro veces superior al campo en el dieléctrico sobre la superficie de radio *b*.

b) hallar la capacidad por unidad de longitud del sistema con los valores de ε_1 dado y ε_2 obtenido.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

10) Calcular la capacidad de un condensador esférico con armaduras de radios R_1 y R_2 , siendo $R_2>R_1$, que se llena con un dieléctrico perfecto de permitividad relativa $\varepsilon_r=a/R$, en la que a es una constante y R la distancia al centro del condensador.

11) Calcular para una carga puntual en el centro de una esfera dieléctrica el vector de polarización y las densidades de cargas ligadas. Dibujar **D**, **E** y **V** en función de r. Emplear $Q=10^{-9}$ C, R=2 cm, $\varepsilon_r=3$. Repetir estas gráficas en ausencia de la esfera dieléctrica.

12) Una esfera dieléctrica de radio a está polarizada de forma que $\mathbf{P}=(K/R)\mathbf{a_r}$, siendo $\mathbf{a_r}$ el vector unitario radial.
a) Calcular las densidades volumétrica y superficial de carga ligada.
b) Calcular la densidad volumétrica de carga libre.
c) Calcular el potencial dentro y fuera de la esfera.
d) Representar gráficamente la variación del potencial con la distancia.

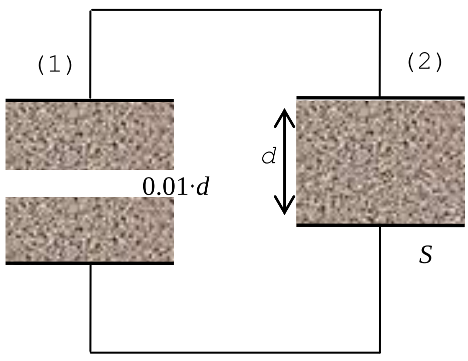
13) Una esfera de dieléctrico simple está uniformemente polarizada en la dirección del eje z, con $\vec{P} = 2{\cdot}10^{-6}\,\vec{a}_z$ (Cm^{-2}). Calcular: a) las densidades de carga de polarización. b) el potencial eléctrico en el centro de la esfera. c) demostrar que la densidad de carga libre en el dieléctrico es nula.

14) En un material de constante dieléctrica ε, existe un campo eléctrico uniforme. Si se practica una cavidad esférica en el interior del material, calcular el campo eléctrico existente en el centro de la cavidad.

15) Dos medios dieléctricos con permitividades ε_1 y ε_2 están separados por una frontera libre de cargas. La intensidad de campo eléctrico en la interface en el medio 1 tiene magnitud E_1 y forma un ángulo α_1 con la normal. Determine la magnitud y la dirección de la intensidad de campo eléctrico en dicho punto de la interface en el medio 2.

16) Sea un condensador de placas plano-paralelas rectangulares. La superficie de cada placa es S, y están separadas una distancia l. Despreciando los efectos de borde, si se aplica una tensión constante V_o entre las placas calcular:
a) El campo eléctrico en el interior, la densidad de carga superficial en las placas, la energía almacenada por el condensador y su capacidad.
b) Repetir el apartado a), suponiendo que se introduce un dieléctrico de dimensiones l/2 x S, y permitividad relativa ε_r.
c) Repetir el apartado b), pero suponiendo que se desconecta la fuente de tensión antes de introducir el dieléctrico.

17) Disponemos de dos condensadores idénticos, de placas plano-paralelas, cuya superficie es S y espesor d, como indica la figura. Entre las placas existe un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = 100\varepsilon_o$. Un vez cargados con un diferencia de potencial V_o, y desconectada la batería, en un instante dado se fractura el dieléctrico entre las placas del condensador (1), de forma que se abre una fisura plana y paralela a las placas, de espesor 0.01·d. Calcular:
a) los vectores $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en los condensadores (1) y (2) antes y después de la fractura.
b) la diferencia de potencial entre las placas de los condensadores tras la fractura.



ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

18) Cuando se usa un cable coaxial para transmitir energía eléctrica, el radio conductor interior está determinado por la corriente de carga, y el tamaño total por la tensión y el tipo de material aislante que se utilice. Suponga que el radio del conductor interno es r_i= 2 mm, y que el material aislante es poliestireno, cuya constante dieléctrica relativa y rigidez dieléctrica son, respectivamente, 2.6 y $20 \cdot 10^6$ V/m. Determine el radio interior, r_o, del conductor externo para que, con una tensión aplicada entre los conductores externo e interno de 10 kV, la intensidad máxima del campo eléctrico en el material aislante no exceda el 25% de su rigidez dieléctrica.

19) Un condensador de placas plano-paralelas, separadas una distancia *d*, tiene un dieléctrico en su interior, ausente de cargas libres, cuya permitividad dieléctrica relativa, ε_r, depende de la distancia a una de las placas, *x*. Calcular la capacidad del condensador si ε_r viene dada por:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3d^2}}$$

20) Dentro de un condensador de placas plano-paralelas, de sección *A* y espesor *d*, introducimos un dieléctrico de permitividad no uniforme, siendo *y* la dirección perpendicular a las placas. Despreciando los efectos de borde y en caso de no existir cargas libres en el interior del dieléctrico, calcular:

a) el campo eléctrico, el desplazamiento eléctrico y el vector de polarización, cuando aplicamos una diferencia de potencial V_o entre las placas.

b) las densidades de carga de polarización.

c) la capacidad del condensador.

$$\varepsilon = \varepsilon_o \left(1 + \frac{y}{d}\right)$$

21) Demostrar que en un dieléctrico lineal no homogéneo, puede existir una densidad volumétrica de carga ligada en ausencia de densidad de carga libre. Calcular su valor. Sol: $-\varepsilon_o(E \cdot \nabla \varepsilon_r)/ \varepsilon_r$

22) Si el espacio entre dos cilindros conductores coaxiales alargados está ocupado por un dieléctrico, ¿cómo debe variar la permitividad relativa con la distancia r al eje para que la intensidad del campo eléctrico sea independiente de r?. ¿Cuál sería la densidad volumétrica de carga ligada?.

Sol: ε_r=K/r, $\rho_b=\lambda/2\pi Kr$, siendo λ la densidad lineal de carga en el cilindro interior.

23) Un electrete tiene la forma de una lámina delgada circular de radio R y espesor t, polarizada permanentemente en la dirección paralela a su eje. La polarización **P** es uniforme en todo el volumen del disco. Calcular **E** y **D** sobre el eje, tanto dentro como fuera del disco.

24) Una esfera de radio a está formada por un dieléctrico homogéneo, con constante dieléctrica relativa ε_r. La esfera está centrada en el origen del espacio libre. El potencial eléctrico viene dado en el interior y exterior de la esfera, respectivamente, por:

$$V_{in} = -\frac{3E_O R \cdot \cos\theta}{\varepsilon_r + 2}$$

$$V_{out} = -E_O R \cdot \cos\theta + \frac{E_O a^3}{R^2} \cdot \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cdot \cos\theta$$

Comprobar que se cumplen las condiciones de contorno para el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico en la superficie de la esfera.

25) Desplazamos la carga 3 una distancia d/2 hacia la izquierda, manteniendo fijas las restantes cargas. ¿Es más estable la disposición anterior que ésta?.

1	2	3	4
•← d →•		•	•
q	-q	q	-q

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

26) Calcular la energía electrostática almacenada en el sistema del problema 4.

27) Calcular la energía electrostática almacenada en el sistema del problema 7.

28) Partiendo de una esfera de radio R_a, que tiene una carga Q en la superficie, se inicia la acumulación de carga sobre una superficie esférica de radio R_b ($R_a<R_b$), concéntrica con la anterior. Calcular el trabajo realizado para acumular sobre la superficie esférica de radio R_b una carga igual a Q/2.

29) Tenemos un sistema de cargas constituido por una distribución uniforme de carga Q en una esfera de radio R_1 y otra de carga -Q distribuida uniformemente sobre una capa esférica, concéntrica con la esfera, de radio $R_2=5R_1$.
- a) Calcular el campo en función de la distancia al centro.
- b) Calcular la energía electrostática del sistema.
- c) Si quitamos la mitad de la carga -Q de la capa esférica, ¿cuál será la variación de energía electrostática del sistema?.

30) Un condensador plano de superficie S y espesor d se carga mediante una batería con una diferencia de potencial V_o. Después de cargado desconectamos la batería. Sin tocar las placas introducimos una lámina metálica de espesor d/2.
- a) Calcular la densidad de energía electrostática antes y después de introducir la lámina metálica.
- b) Calcular la energía total en ambos casos. ¿En qué se ha invertido la diferencia entre las dos energías?.

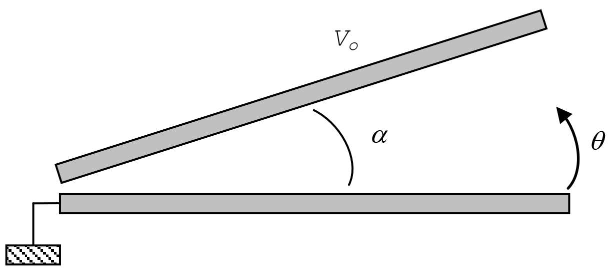
31) Un condensador de armaduras planas, de superficie A=200 cm^2, separadas la distancia d=1 mm, tiene en su zona central una lámina de material dieléctrico, de la misma forma y tamaño de las armaduras, espesor de 0.6 mm y permitividad relativa $\varepsilon_r=4$, El condensador se ha cargado hasta adquirir entre sus armaduras el potencial V= 1000 V. Calcula: a) La capacidad del condensador. b) La carga del mismo. c) La energía almacenada. d) Los vectores desplazamiento eléctrico, campo eléctrico y polarización, representándolos gráficamente.

32) Una carga eléctrica Q se distribuye en una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ε, de forma que las densidades de carga libre sean:

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_o (a/R) & para \quad 0 \le R \le a \\ 0 & para \quad R \ge a \end{cases}$$

- a) Expresar ρ_o en función de Q y a.
- b) Hallar la energía electrostática del sistema.

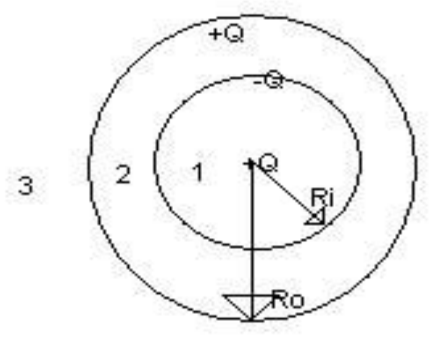
33) Dos planos conductores aislados infinitos, que se mantienen a potenciales 0 y V_o, constituyen una configuración en forma de cuña, como se ilustra en la figura. Determine las distribuciones de potencial en las regiones: a) $0 < \phi < \alpha$, b) $\alpha < \phi < 2\pi$.



34) Calcular, mediante el método de las imágenes, la carga total inducida en una esfera conductora conectada a tierra, inducida por una carga puntual, Q, situada fuera de la esfera, a una distancia D de su centro.

PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA – MEDIOS MATERIALES

⦿ Ejercicio 1



Existe simetría esférica, por lo cual podemos hacer el problema mediante el teorema de Gauss. Calcularemos primero el campo electrostático y luego el potencial.

$$S_{esfera} = 4\pi R^2$$

a) Región 1: R < R_i

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{ds} \Rightarrow E \text{ paralelo a } ds = \int E \cdot ds = E \int ds = E \cdot S$$

$$E \cdot S = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} \vec{a}_R \left(V\!/\!_m \right)}$$

Región 2: R_i<R<R_o

Como el campo en el interior de un metal es nulo, la carga en el interior de una superficie gaussiana en esta región es siempre cero, por lo que en la superficie interna del metal se induce una carga –Q (la carga libre en el interior del metal es nula). Como el metal es neutro en la superficie externa se induce una carga Q.

$$\boxed{\vec{E}_2 = 0\, \overrightarrow{a_R}}$$

Región 3: R > R_o

El campo en esta región tiene la misma forma que en la region 1, ya que la carga encerrada por la superficie gaussiana es la misma, Q (Q-Q+Q = Q). La única diferencia es que ahora R debe ser mayor que R_o

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} \vec{a}_R \left(V\!/\!_m \right)}, \text{ para } R > R_o.$$

b) Para calcular el potencial en todos los puntos del espacio se integra el campo eléctrico. Empezaremos desde la región 3 hacia la 1.

Región 3: Usaremos la ecuacion:

$$\boxed{V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{R} + K}$$ (con K = cte de integracion)

$$V = -\int \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}\, dR = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R} + K \quad (V) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_3 = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R} + K \quad (V)}$$

Para hallar la constante, partimos de la suposición de que el campo en el infinito es cero; igualando, tenemos

$$0 = \frac{Q}{4\pi\,\infty} + K \quad \Rightarrow \quad K = 0$$

Región 2:

El campo en esta región es cero, luego el potencial es constante. Por la continuidad del potencial, éste toma el valor de la región 3 haciendo $R=R_o$:

$$\boxed{V_2 = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R_o} \quad (V)}$$

Región 1:

$$V_1 = -\int \frac{1}{4\pi\, R^2} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}\, dR \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{1}{4\pi\, R} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} + K \quad (V)$$

Para hallar K, por la continuidad del potencial, basta con igualar el valor del potencial de la región 1 de valor R_i al de la región 2:

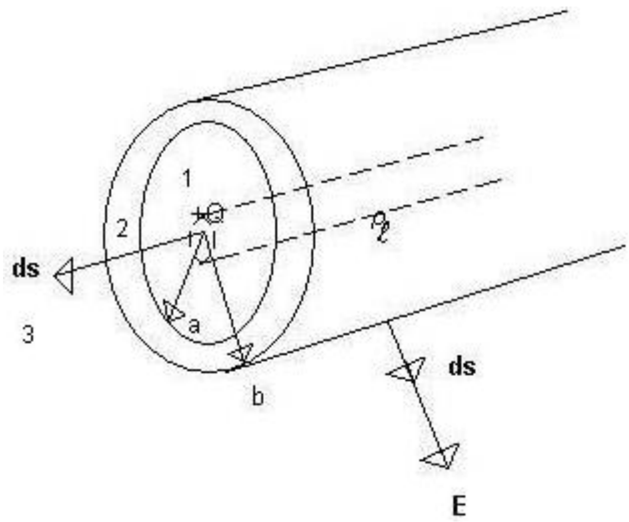
$$\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R_i} + K = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R_o} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R_o} - \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, R_i} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right] \quad \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\, R} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{V_1 = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right] \quad (V)}$$

⊙ **Ejercicio 2**

a)



Suponemos la longitud del tubo lo suficientemente grande como para que **E** sea perpendicular al eje. Entonces, las tapas no contribuyen al calcular con el teorema de Gauss.

Zona 1:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \;;$$

$$Q = \rho_l \cdot L$$

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint_{tapas} \vec{E}\cdot\vec{ds} + \oint_{lateral} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint_{lateral} \vec{E}\cdot\vec{ds} \Rightarrow E \; paralelo \; a \; ds = \int E \cdot ds = E\int ds = E\cdot S$$

$$S = 2\pi r L \Rightarrow E\cdot 2\pi r\cancel{L} = \frac{\rho_l \cdot \cancel{L}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left[\vec{E_1} = \frac{\rho_l}{2\pi r\varepsilon_0}\vec{a_r}\right]$$

Zona 2:

Esta región es el interior del conductor, por tanto no existe campo electrostático:

$$\vec{E}_2 = 0\,\vec{a_r}$$

Zona 3:

Como el metal es neutro, la carga total es nula (se induce una carga igual y opuesta a la del hilo en la superficie interna, e igual a la del hilo en la superficie externa). La carga encerrada por la superficie gaussiana queda igual a la del hilo. Por tanto, en esta región el campo es el mismo que en la zona 1:

$$\left[\vec{E_1} = \frac{\rho_l}{2\pi r\varepsilon_0}\vec{a_r}\right]$$

Una vez que hemos calculado el campo de las 3 zonas, simplemente damos valores y hallamos el valor numérico del campo en cada zona:

r = 1m (Zona 3)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{60\times10^{-12}}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{30\times10^{-12}}{\pi\varepsilon_0}\left(V/m\right)}$$

r = 0.25 m (Zona 2)

$$\boxed{\vec{E}_2 = 0\left(V/m\right)}$$

r = 0.15 m (Zona 1)

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{60\times10^{-12}}{2\pi\varepsilon_0\cdot0.15} = \frac{0.2\times10^{-9}}{\pi\varepsilon_0}\left(V/m\right)}$$

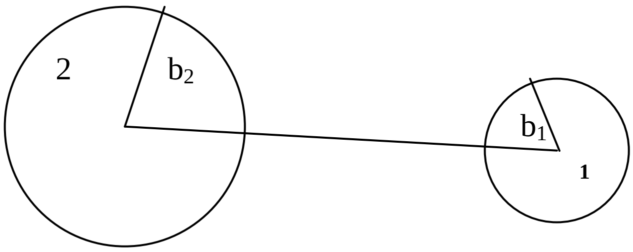
b) Nos piden la diferencia de potencial entre ambas superficies del conductor. Sabemos que el potencial en el interior de un conductor es constante, asi que la diferencia de potencial entre ambas caras es nula:

$$\boxed{V_{ba} = 0}$$

Siendo V_{ba} la diferencia de potencial entre cada cara.

⦿ **Ejercicio 3**

Tenemos dos esferas :



Como la carga se distribuye uniformemente en la superficie, el campo fuera de las esferas es el mismo que el produce una carga puntual colocada en el centro de valor la carga de la esfera respectiva. Aplicando el teorema de Gauss, tomamos una superficie gausiana de radio ϕ:

$\boxed{\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$, que operando nos queda: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\overrightarrow{a_r}$

Para la esfera 1: $\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o b_1^2}\overrightarrow{a_r}$

Para la esfera 2: $\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o b_2^2}\overrightarrow{a_r}$

Donde q_1 y q_2 son las cargas en la superficie de cada esfera.

Análogamente, integrando el campo eléctrico, el potencial fuera de las esferas es análogo al de una carga puntual. Por la continuidad del potencial, su valor en la superficie de las esferas (igual que el del interior, por ser conductores) será respectivamente:

Para la esfera 1: $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 b_1}$

Para la esfera 2: $V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b_2}$

El problema nos dice que entre las dos esferas hay una carga encerrada q, es decir:

$$q = q_1 + q_2.$$

Al estar unidas por un cable, el potencial en ambas esferas es el mismo: $V_1 = V_2$. Lo que nos lleva, despejando, a que $q_1 b_2 = q_2 b_1$.

Teniendo en cuenta que: $q = q_1 + q_2$

obtenemos dos expresiones de la carga en la superficie de cada una de las esferas, en función de datos conocidos como son el radio y la carga total:

$$q_1 = \frac{b_1 q}{b_1 + b_2} \qquad \text{Y} \qquad q_2 = \frac{b_2 q}{b_1 + b_2}$$

La carga está repartida uniformemente, es decir, las esferas poseen densidades constantes de valor:

$\rho_{\sigma 1} = q_1 / s_1$, $\rho_{\sigma 2} = q_2 / s_2$, donde s_1 y s_2 son las superficies de las esferas:
$s_1 = 4\pi \varepsilon_0 b_1^2$, $s_2 = 4\pi\varepsilon_0 b_2^2$

Sustituyendo datos, obtenemos dos expresiones en función también de datos conocidos.

Densidad de la esfera 1: $\rho_{01} = \dfrac{q}{4\pi b_1(b_1 + b_2)}$

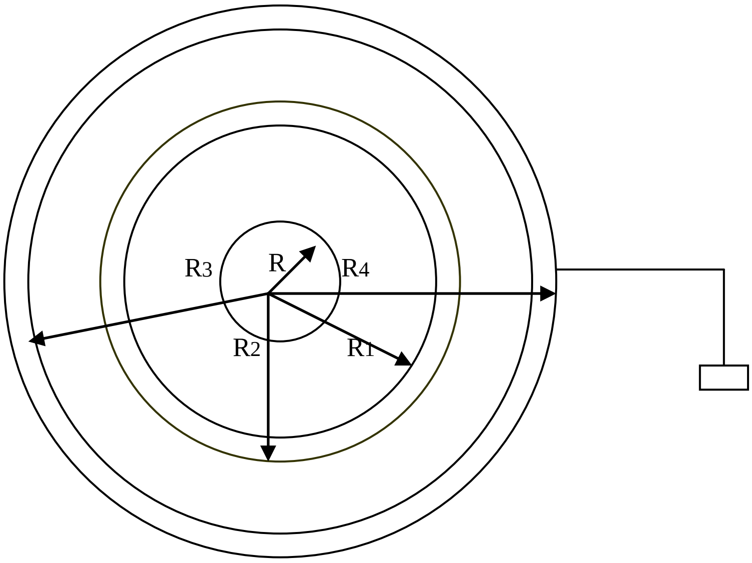
Densidad de la esfera 2: $\rho_{02} = \dfrac{q}{4\pi b_2(b_1 + b_2)}$

Y si queremos dejar el campo eléctrico en función de la carga hallada:

Para la esfera 1: $\vec{E}_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 b_1(b_1 + b_2)} \overrightarrow{a_r}$

Para la esfera 2: $\vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 b_2(b_1 + b_2)} \overrightarrow{a_r}$

⦿ **Ejercicio 4**



a) Para hallar la distribución de cargas hay que recordar que las cargas en los metales se distribuyen en la superficie. Además, si se aplica el teorema de Gauss a una superficie en el interior de un metal, al no existir campo eléctrico en éste, la carga total en el interior de la superficie gaussiana ha de anularse. Sea r la distancia al centro de las esferas:

r=R

tenemos una distribución Q y su densidad es $\rho = \dfrac{Q}{2\pi RL}$

r = R1

tenemos una distribución –Q y su densidad es $\rho = \dfrac{-Q}{2\pi R_1 L}$

r = R2

tenemos una distribución Q + Q’ y su densidad es $\rho = \dfrac{Q+Q'}{2\pi R_2 L}$

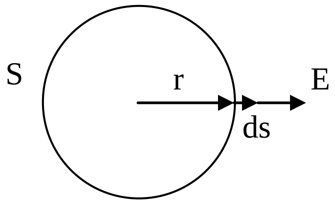
r =R3

tenemos una distribución –(Q+Q’) y su densidad es $\rho = -\dfrac{Q+Q'}{2\pi R_3 L}$

r =R4

debido a la toma de tierra, no existe carga y su densidad es por tanto $\rho = 0$

b) Para hallar el campo eléctrico aplicamos la ley de Gauss a superficies cilíndricas coaxiales en las distintas regiones, considerando la simetría cilíndrica del problema. Así,



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E||ds) = (E \text{ cte en s})$$

$$E\oint ds = E2\pi rL \text{ E}\oint_s ds = E2\pi \text{ rL}$$

$$\rightarrow \quad E2\pi rL = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$

(Teorema de Gauss)

Por lo tanto:

<u>r<R</u>

$\vec{E} = 0$

<u>R<r<R1</u>

$$Q_0 = Q \quad \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}\overrightarrow{a_r}$$

<u>R1 < r < R2</u>

$\vec{E} = 0$

<u>R2 < r < R3</u>

$$Q_0 = \text{Q + Q'} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q+Q'}{2\pi\varepsilon_0 rL}\overrightarrow{a_r}$$

<u>R3< r < R4</u>

$\vec{E} = 0$

<u>r > R4</u>

$Q_0 = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

c) Para calcular el potencial integramos el campo, de fuera hacia dentro, aplicando la continuidad del potencial al pasar de una región a otra. De esta forma:

<u>r > R4</u>

$\vec{E} = 0 \rightarrow$ V = cte ; V (r = R4) = 0 (tierra)

<u>R3<r < R4</u>

V = cte = V (r = R4) = 0

R2<r<R3

V = - $\int E dr = -\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \int \frac{dr}{r} = -\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln r + K$. Como V (r = R3) = 0 $\rightarrow$

$-\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln R3 + k = 0 \rightarrow$ K = $\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln R3 \rightarrow$ **V=** $\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R3}{r}$

R <r<R1

V = cte = V (R2) = $\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2}$

V = $-\int E dr = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \int \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln r + k'$.

Como V(R1) = $\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2}$;

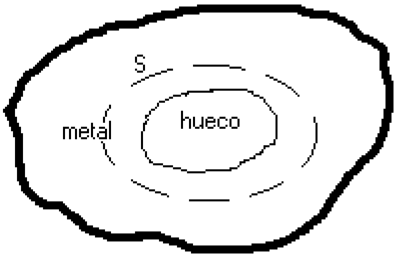
- $\frac{Q+Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2} = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln R1 + K'$ $\rightarrow$K' = $\frac{Q+Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2} + \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln R1$

$$V = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R1R3}{R2r} + \frac{Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2}$$

r < R $\rightarrow$ V = cte = V (R1) = $\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R1R3}{R2R} + \frac{Q'}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2}$

⦿ Ejercicio 5

Sea un conductor tal como éste:

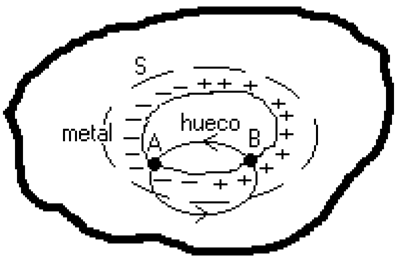


Aplicamos el teorema de Gauss en S: $\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{Q_S}}{\varepsilon_0}$

Sabemos, por las propiedades de los conductores, que el campo dentro del metal es nulo; por tanto, en la superficie Gaussiana, S, también lo es. Así, la única carga posible dentro de S, que podría existir en la superficie que rodea la cavidad interior (ya que no existe carga libre neta en el interior de los metales), es también nula. O sea:

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{Q_S}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \mathbf{Q_S} = 0$$

Esto no implica que la densidad superficial de carga en la cavidad interior, $\rho_{\mathbf{S-cavidad}}$, sea 0, ya que puede haber una distribución de carga en la superficie de la cavidad interior tal que las cargas positivas se compensen con las negativas de forma que **$\mathbf{Q_s}$= 0**.



En esta situación existiría un campo eléctrico en la superficie de la cavidad interior, que iría de las carga positivas a las negativas. Para calcularlo, trazamos un camino cerrado a través de los puntos A y B:

Por un lado => $\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{l}} = 0$ ya que el campo electrostático es conservativo.

Por otro lado => $\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{l}} = \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{l}} + \int_B^A \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{l}}$

Como ya dijimos antes, el campo en el metal es cero, lo que significa que: $\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{l}} = 0$, con lo que finalmente nos queda:

$\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad para\ toda\ trayectoria => \vec{E}_{cavidad} = 0$. No es posible tal distribución de carga, ya que el campo eléctrico en el interior de la cavidad es 0.

Al no ser posible que exista tal distribución, se confirma que $\rho_{S-cavidad} = 0$

⦿ **Ejercicio 6**

Partiendo de la teoría, se comprueba que la energía potencial para un sistema de N cargas es igual a:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

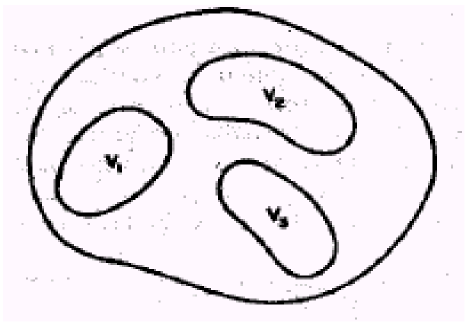
donde V_i es el potencial creado en donde se encuentre q_i por todas las demás cargas. Vista la interacción de cargas discretas, mas fácil de interpretar, buscamos la energía potencial eléctrica para un conductor, que no es más que una generalización de una distribución superficial de carga, ya que la carga en él se distribuye en su superficie. La expresión del potencial para una distribución superficial de cargas será en un conductor:

$$W = \frac{1}{2}\int_s \rho_s V ds$$

Donde S es, por las propiedades de los conductores, una superficie equipotencial, y por tanto el potencial en ella V es constante y puede salir de la integral.

$$W = \frac{1}{2} V \int_s \rho_s ds = \frac{1}{2} QV$$

Ahora suponemos un sistema formado por n conductores. La energía potencial electrostática para un sistema discreto de n conductores será la suma de la energía de cada una de los conductores del sistema



$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\int_{S_i} \rho_{S_i} dS_i V_i$$

donde definimos V_i es el potencial de cada conductor con superficie S_i, y ρ_{S_i} es la densidad de superficial de carga en cada conductor. Como cada conductor es una superficie equipotencial, el potencial en cada conductor es constante y vuelve a salir de la integral.

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} V_i \int_{S_i} \rho_{S_i} dS_i$$

Si integramos la carga en cada potencial nos queda que: $\int_{S_i} \rho_{S_i} dS_i = Q_i$. Por lo que la expresión de la suma de los n conductores es:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i$$

⦿ **Ejercicio 7**

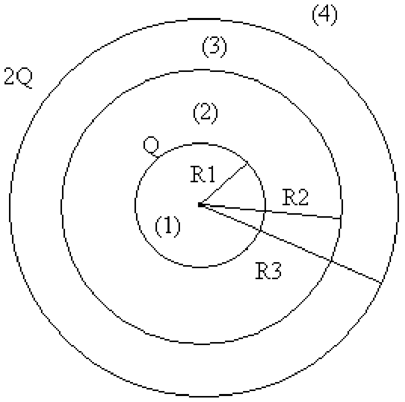


Fig. 1(a)

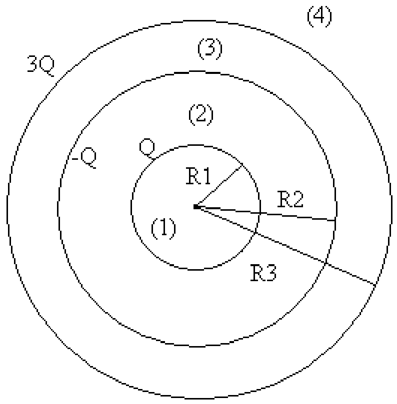


Fig.1(b)

a) Debido a la carga Q en la superficie de la esfera conductora, aparece un $-Q$, por inducción, en el radio interno de la corona. Y para compensar ésta $-Q$, y como la corona está con $2Q$, en la parte exterior de la corona esférica existe una carga $3Q$ (Fig. 1 (b)).

Región (1), Región (3):
Como tanto la esfera como la corona esférica que la envuelve son conductoras, podremos decir que el campo interior a ambas es igual a cero.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = 0$$

Regiones (2) y (4):
Aplicamos Gauss para un punto, P, a una distancia r del centro de la esfera conductora:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\varepsilon_0}$$

Eligiendo como superficies gaussianas esferas concéntricas, como tanto el campo electrostático como $d\vec{s}$ son radiales, es decir, perpendiculares a la superficie gaussiana en cada punto y paralelos entre sí, el producto escalar es igual al producto de sus módulos

$$\vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds$$

Además, como el módulo del campo eléctrico sólo depende de la distancia al centro, la integral en la ley de Gauss queda como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot \int_S ds = 4\pi r^2 E = \frac{Q_v}{\varepsilon_0}$$

Para la región (2)

$R_1<r<R_2$,

Q_v vale Q, por tanto, despejando el campo y dotándolo de carácter vectorial:

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_R \left[\frac{N}{m}\right]$$

Para la región (4)

r ≥ R3

teniendo en cuenta que ahora la carga encerrada por las superficies gaussianas es igual a 3*Q*.

$$\vec{E}_4 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{a}_R \left[\frac{N}{m}\right]$$

b) Utilizando $V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$, siendo *V* el potencial, tendremos para el potencial en (4):

$$V_4 = -\int \vec{E}_4\cdot d\vec{r} \rightarrow V_4 = -\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k_4$$

y como el potencial en el infinito es igual a cero, $k_4 = 0$. Por tanto

$$V_4 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Por continuidad del potencial y por ser la región (3) conductora, el potencial es constante en toda ella, igual a $V_4(r = R_3)$. O sea,

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

A continuación, el potencial en la región (2) vale

$$V_2 = -\int \vec{E}_2\cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k_2$$

Por continuidad del potencial: $V_2(r = R_2) = V_3$. Entonces, despejando para hallar la constante de integración k, llegamos a que:

$$V_2\left(r = R_2\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + k_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \rightarrow k_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right]$$

Es decir que,

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{3}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right]$$

Finalmente al ser (1) conductor y por continuidad del potencial: $V_1 = V_2(r = R_1)$. O sea

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{3}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right]$$

Expresando la diferencia de potencial como $V = V_2(r = R_1) - V_4(r = R_3)$, obtenemos:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

c) Usaremos la expresión $C = \frac{Q}{V}$ para calcular la capacidad del condensador, donde *C* es la capacidad y *V* será la diferencia de potencial calculada anteriormente:

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{R_2 - R_1}{R_1\cdot R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\cdot R_1\cdot R_2}{R_2 - R_1}[F]$$

⦿ **Ejercicio 8**

Para calcular la capacidad suponemos una carga Q en la superficie del cilindro interno y una carga –Q en la superficie interior del cilindro externo. También suponemos 'L' suficientemente largo para que el campo sea radial y perpendicular al eje (L>>b). La capacidad viene dada por:

C = Q/V

Para calcular el campo eléctrico aplicamos el teorema de Gauss a un cilindro coaxial imaginario, de radio r, entre los dos conductores:

$$\boxed{\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

$$E 2\Pi L r \cdot ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

No hay flujo en las tapas porque E y ds son perpendiculares, y por tanto, su producto escalar sería: Edscos90=0. Cogemos solo el flujo en la parte lateral. Con lo que:

$$E = \frac{Q}{2\Pi\varepsilon_0 L r}$$

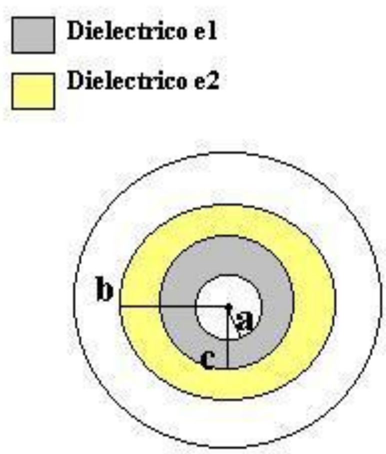
La carga -Q aparece por inducción electrostática de la carga Q .

$$V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E} \cdot dr = -\frac{Q}{2\Pi\varepsilon_0 L}\int_A^B \frac{1}{r} \cdot dr = -\frac{Q}{2\Pi\varepsilon_0 L}(\ln a - \ln b)$$

$$V = \frac{Q}{2\Pi\varepsilon_0 L}(\ln\frac{b}{a})$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\Pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

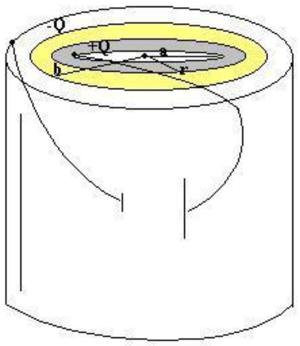
⦿ Ejercicio 9



Observamos que según el enunciado tenemos dos conductores, separados una cierta distancia (rellenada con los dos dieléctricos), sometidos a una diferencia de potencial Vo. Tomaremos como dato que la carga total almacenada por la estructura es Q.

Por las propiedades de los conductores (el campo en su interior es nulo), esta carga se distribuirá de la siguiente forma: Se almacenará en la cara externa del primer conductor una carga +Q una carga –Q en la cara interna del segundo conductor.

Como consecuencia de esto, la estructura queda de la siguiente forma:



a) Para el primer apartado tomamos como dato que debemos hallar ε_2 de forma que se cumpla que:

$$\vec{E}_1 = 4\vec{E}_2$$

Observamos que los dos conductores son cilíndricos. Al ser infinitos podemos aplicar la ley de gauss generalizada para dieléctricos:

$$\oint_s \vec{D}\cdot\vec{ds} = \rho_v$$

Veamos pues, como se comporta el vector desplazamiento eléctrico en la región comprendida por los dos dieléctricos, siendo la primera región o medio 1, en donde tenemos el dieléctrico de permeabilidad $\varepsilon_1=4\varepsilon_0$, y la segunda región o medio 2, en la que está el dieléctrico de permeabilidad ε_2. Vemos que para la primera región $\vec{D}_1$ va en la dirección radial de los cilindros, dirección que es normal a la línea de separación de los dos medios. Igual sucede con $\vec{D}_2$. Recurriendo a las condiciones de contorno para medios materiales, como en la superficie entre los dieléctricos no existe carga libre superficial, el vector desplazamiento cumple :

$$D_{1n} - D_{2n} = 0$$

Y como :

$$D_{1n} = D_1 \text{ y } D_{2n} = D_2$$

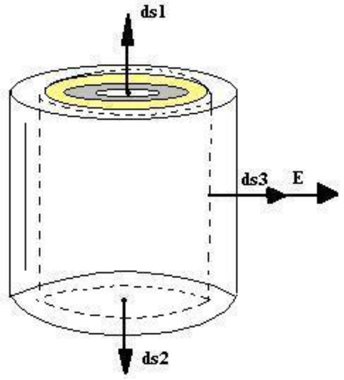
Nos queda que:

$$D_1 = D_2 = D$$

Con esto deducimos que para ambas regiones el vector desplazamiento será constante, y tendrá dirección radial: $\vec{D} = D(\vec{a}_R)$.

Aplicaremos la ley de Gauss para dieléctricos, tomando como superficie gaussiana un cilindro coaxial de radio R y longitud L, situado entre los dos conductores.

Calculando el flujo: $\oint_s \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_{s1} \vec{D}\cdot\vec{ds}_1 + \int_{s2} \vec{D}\cdot\vec{ds}_2 + \int_{s3} \vec{D}\cdot\vec{ds}_3$



Vemos que para s_1 y s_2 (las tapas del cilindro),el vector desplazamiento $\vec{D}$ es perpendicular a $\vec{ds}_1$ y a $\vec{ds}_2$, y según la definición del producto escalar de dos vectores, las integrales en las tapas del cilindro serán 0, influyendo sólo en el flujo resultante la integral en la intercara del cilindro (En este caso $\vec{D}$ y $\vec{ds}_3$ son paralelos).

Como consecuencia la integral queda de la siguiente forma : $\oint_s \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_{s3} \vec{D}\cdot\vec{ds}_3 = \int_{s3} D\cdot ds_3$

Y como D es constante en S_3, sacándolo fuera de la integral:

$\oint_s \vec{D}\cdot\vec{ds} = D\int_{s3} ds_3 = D\cdot S = D2\pi RL$, siendo $2\pi RL$ el valor de la superficie S_3.

La carga total almacenada por la superficie gaussiana es +Q, debido a que nuestro cilindro encierra dicha carga.

Por lo cual, despejando D de la siguiente ecuación: $D2\pi RL = Q$, nos queda que el vector desplazamiento vale:

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi RL}\vec{a}_R$$

De la relación entre desplazamineto y campo eléctrico para medios materiales: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, los campos eléctricos en las regiones 1 y 2 son :

Región 1 => $\vec{E}_1 = \dfrac{Q}{2\pi rL\varepsilon_1}\vec{a}r$ Región 2 => $\vec{E}_2 = \dfrac{Q}{2\pi rL\varepsilon_2}\vec{a}r$

Así el campo en la superficie de los dos conductores vale :

Región 1 => $\dfrac{Q}{2\pi aL\varepsilon_1}\vec{a}r = 4\dfrac{Q}{2\pi bL\varepsilon_2}\vec{a}r$ Región 2 => $\vec{E}_2 = \dfrac{Q}{2\pi bL\varepsilon_2}\vec{a}r$

Y como se ha de cumplir que $\vec{E}_1 = 4\vec{E}_2$:

$$\frac{Q}{2\pi aL\varepsilon_1}\vec{a}_R = 4\frac{Q}{2\pi bL\varepsilon_2}\vec{a}_R$$

Y despejando ε_2 nos queda que: $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_1 \dfrac{a}{b}$

Sabiendo que b = 2a y que $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$:

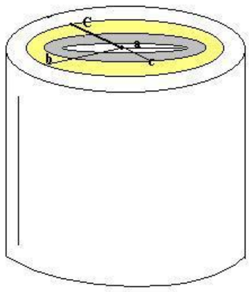
$$\boxed{\varepsilon_2 = 16\varepsilon_0 \frac{a}{2a} = 8\varepsilon_0}$$

b)Para hallar la capacidad de la estructura utilizaremos la siguiente ecuación: $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$, siendo Q la carga total almacenada en el condensador y ΔV la diferencia de potencial entre las placas, que para nuestro caso será Vo.

Como consecuencia, debemos relacionar la diferencia de potencial (Vo) con la carga en las placas. Para ello nos ayudaremos de la siguiente ecuación:

$$\int_{v1}^{v2} dV = -\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Tomando como curva C para nuestro ejemplo, la dirección radial entre los conductores.



Debido a que no estamos en el vacío, sino que la zona que hay entre las placas esta constituida por dos dieléctricos, con campos distintos, debemos separar la integral en dos: una integral para la Región 1, que va desde R = a hasta un punto R = c (donde termina la región 1 y empieza la región 2) y otra integral que va desde R = c hasta R = b para la Región 2:

$$Vo = -\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \left[\int_a^c \vec{E}_1 \cdot \vec{dR} + \int_c^b \vec{E}_2 \cdot \vec{dR} \right]$$

Como $\vec{dl}$ y el campo son vectores paralelos y con el mismo sentido, nos queda que :

$$Vo = \int_a^c E_1 \cdot dR + \int_c^b E_2 \cdot dR = \int_a^c \frac{Q}{2\pi RL\varepsilon_1} \cdot dR + \int_c^b \cdot \frac{Q}{2\pi RL\varepsilon_2} dR$$

Resolviendo nos queda :

$$Vo = \frac{Q}{8\varepsilon_o \pi L} \cdot \left(\ln\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\ln\frac{2a}{c} \right)$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión de la capacidad, se tiene que:

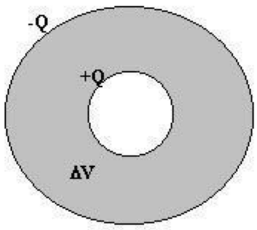
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Vo} = 8\varepsilon_o \pi L \cdot \left(\ln\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\ln\frac{2a}{c} \right)^{-1}$$

Por lo que la capacidad por unidad de longitud será:

Electrostática

$$\boxed{\frac{C}{L}\ 8\varepsilon_o\pi\cdot\left(\ln\frac{c}{a}+\frac{1}{2}\ln\frac{2a}{c}\right)^{-1}}$$

⦿ **Ejercicio 10**



La capacidad de un condensador viene dada por la siguiente expresión:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

donde Q es la carga total del condensador y ΔV la diferencia de potencial entre las placas. Para calcular la diferencia de potencial utilizaremos la siguiente expresión:

$$\int_{v1}^{v2} dV = -\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Debemos pues de calcular el campo eléctrico en el condensador. Para ello utilizaremos la expresión $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, de donde despejando $\vec{E}$ nos queda que $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$.

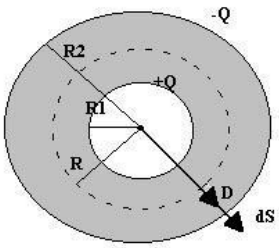
Para hallar el vector desplazamiento eléctrico entre las placas (fuera es nulo), utilizamos la ley de gauss para medios materiales:

$$\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_v$$

Tomaremos como sistema coordenado, las coordenadas esféricas, por la simetría esférica del problema y como superficie gaussiana una esfera concéntrica de radio R.

Para calcular el flujo, $\vec{ds}$ y $\vec{D}$ tienen la misma dirección y sentido (radial), por lo que el producto escalar de estos dos vectores será igual al producto de módulos.

Como D en esa zona es constante en la superficie gaussiana :



$$\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = D\int_s ds = D \cdot S = D4\pi R^2$$

Siendo $4\pi R^2$ la superficie de la esfera de radio R. Como consecuencia, la carga total encerrada en esa superficie gaussiana es Q.

Así, la ley de gauss nos queda de la siguiente forma: $D4\pi R^2 = Q$

Y despejando D, obtenemos el módulo del vector desplazamiento: $D = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Dándole carácter vectorial: $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\vec{a}_R$

Ahora hallaremos el campo eléctrico en la región: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon 4\pi R^2}\vec{a}_R$

Sustituiremos ahora la permitividad absoluta por su verdadero valor: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, siendo ε_0 la permitividad del vacío y ε_r la permitividad relativa que en nuestro caso será: $\frac{a}{R}$.

El campo eléctrico en la región es entonces :

$$\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 4\pi R^2}\vec{a}_R = \frac{Q}{\varepsilon_0 \frac{a}{R} 4\pi R^2}\vec{a}_R = \frac{Q}{\varepsilon_0 a 4\pi R}\vec{a}_R$$

Calcularemos ahora, la diferencia de tensión entre las placas. Para este ejercicio nuestra curva será la recta que va en dirección radial desde R1 a R2, por lo que la ecuación nos queda:

$$Vo = \int_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_C \frac{Q}{\varepsilon_0 a 4\pi R}\vec{a}_R \cdot dR\vec{a}_R = \int_C \frac{Q}{\varepsilon_0 a 4\pi R}\cdot dR = \frac{Q}{\varepsilon_0 a 4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

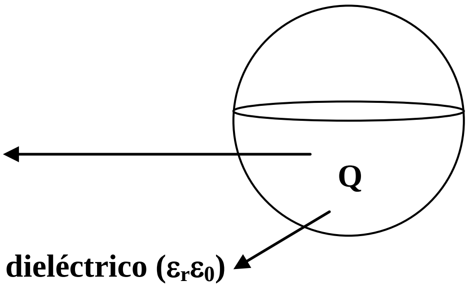
Donde hemos integrado a lo largo de la dirección radial, siendo $\vec{E}$ y $\vec{dl} = dR\vec{a}_R$ vectores paralelos.

Sustituyendo el potencial, en la fórmula de la capacidad $C = \frac{Q}{\Delta V}$ nos queda:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Vo} = \frac{\varepsilon_0 a 4\pi}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

⦿ Ejercicio 11

Carga puntual



Permitividad del dieléctrico ($\varepsilon_r\varepsilon_0$)

- Nos pide hallar el vector de polarización para ello partiremos de la siguiente fórmula:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Y de esta fórmula despejamos el vector de polarización, nos queda:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}$$

Luego nuestro problema queda reducido a hallar el vector de desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico, y sustituir dichos valores en la ecuación anterior.

a) Hallar el vector de desplazamiento eléctrico
Para hallarlo aplicaremos el teorema de Gauss para dieléctricos:

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = Q_v$$

(Cargas libres encerradas, en nuestro problema es la carga puntual Q)

Para resolver dicha ecuación tenemos que elegir una superficie gaussiana, vamos a escoger una esfera de cualquier radio r. Ya sea dentro o fuera de la esfera la carga libre encerrada siempre es Q:

Vemos que por simetría el campo eléctrico solo depende de la coordenada r, y ésta a su vez es constante, por lo tanto puede salir de la integral, y al ser los vectores paralelos, podemos eliminar el carácter vectorial y dejar la fórmula de la siguiente manera:

$$D(r)\int_S dS = Q$$

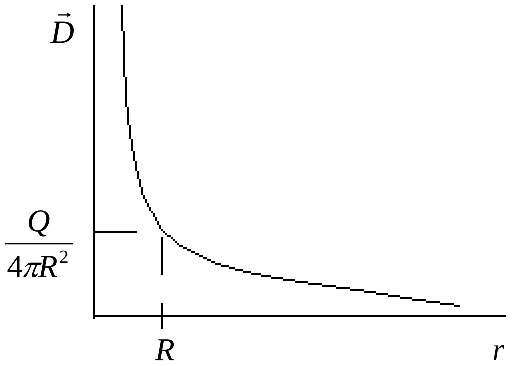
Por lo tanto el vector desplazamiento nos queda:

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Dándole carácter vectorial:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_r \qquad \forall r$$

<u>Representación gráfica del vector desplazamiento</u>



El problema nos pide que lo representemos con dieléctrico y sin él, pero en este caso la gráfica sería la misma.

b) Hallar el campo eléctrico
Si suponemos el medio lineal podemos escribir que:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

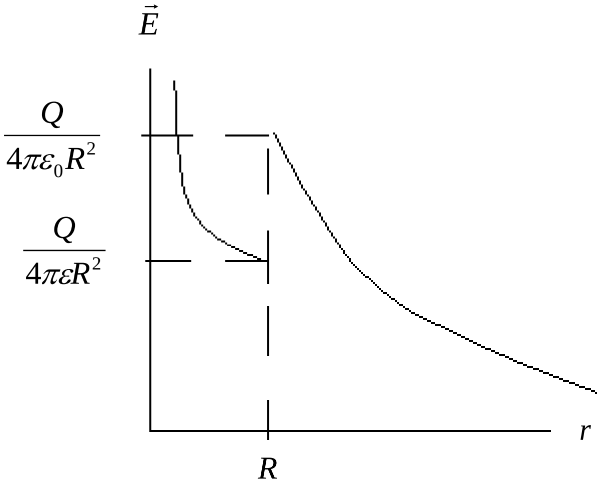
Luego el campo eléctrico será:

$\vec{E}$ *para* $r < R$ $\quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{a}_r$

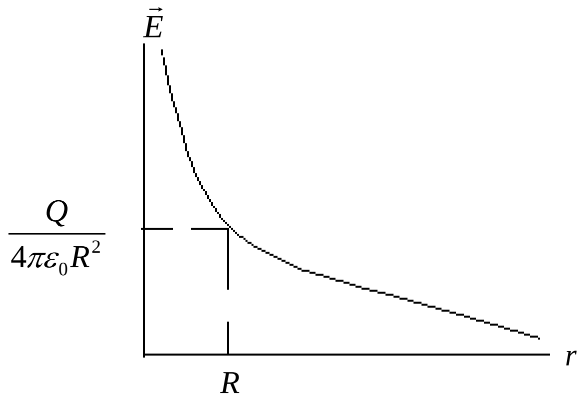
$\vec{E}$ *para* $r > R$ $\quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{a}_r$

<u>Representación gráfica del campo eléctrico</u>

Gráfica con esfera dieléctrica



El campo eléctrico es discontinuo en r = R, debido al cambio de permitividades. Sin embargo sin esfera dieléctrica el campo si es continuo como se puede apreciar en la siguiente gráfica. (campo creado por la carga puntual Q).



Después de obtener los datos que nos eran necesarios para hallar el vector de polarización, lo único que nos queda es sustituirlos en la ecuación:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$\vec{P}$ *para* $r > R$

$$\vec{P} = 0$$

Esto se debe a que en r > R nos encontramos en el vacío y ahí el vector de polarización es 0.

$\vec{P}$ *para* $r \leq R$

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_r - \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}\left[1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]\vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}\left[\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r - \varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right]\vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}\left[\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right]\vec{a}_r$$

- Lo otro que nos pedía el problema eran las densidades de cargas ligadas:

<u>Densidad de carga de polarización en volumen</u>

$$\rho_{PV} = -\vec{\nabla}\,\vec{P} = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}\theta P_r) = 0; \qquad 0 < r < R$$

La carga volumétrica de polarización es cero.

<u>Densidad de carga de polarización superficial</u>

$$\rho_{PS} = \vec{P}_S \bullet \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi R^2}\left[\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right]$$

Como la carga de polarización total en el dieléctrico ha de ser nula, existe una carga puntual de polarización, Q_P, en el centro del dieléctrico de valor:

$$Q_p = -\rho_{PS} \cdot 4\pi R^2 = Q\left[\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right]$$

- Lo último que nos queda es hallar el potencial para poder dibujarlo, que es otra de las cosas que nos piden.

$$V = -\int \vec{E} \bullet d\vec{r} + Cte$$

V para r > R

$$V = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cte$$

Como sabemos que:

$$V(\infty) = 0 \rightarrow cte. = 0$$

Y nos queda que el potencial para r > R es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

V para r < R

$$V = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + Cte$$

Por la continuidad del potencial en la superficie
V(r<R) en R = V(r>R) en R

Pues si igualamos las dos fórmulas y despejamos la Cte, podemos hallar su valor, que es el siguiente:

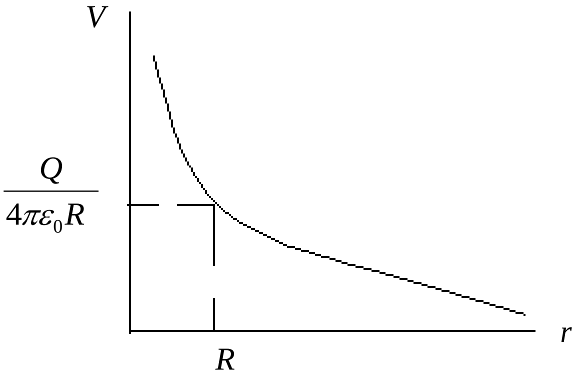
$$Cte = \frac{Q}{4\pi R}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Y si ese valor lo sustituimos en el potencial para r <R, este nos queda:

$$V = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0 R} + \frac{1}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon R}\right]$$

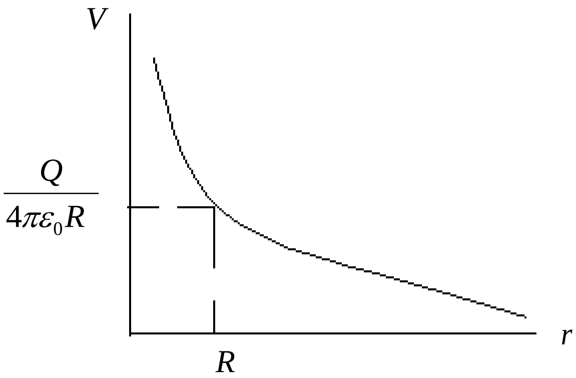
Representación gráfica del potencial

Con esfera dieléctrica



Sin esfera dieléctrica el potencial tiene una dependencia análoga con la única diferencia de que en el interior de la esfera, es decir r <R, el potencial tendrá valores mayores.

Sin esfera dieléctrica



⦿ Ejercicio 12

a) Calcular las densidades volumétrica y superficial de carga de polarización.

Se define la densidad volumétrica de carga de polarización δ_{pv} como:

$$\delta_{pv} = -\vec{\nabla}\vec{P}$$

Calculamos la divergencia de $\vec{P}$ en esféricas:

$$\vec{\nabla}\vec{P} = \frac{1}{R^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 sen\theta \frac{K}{R}\right) = \frac{K}{R^2}$$

Por lo que la densidad volumétrica de carga será: $\boxed{\delta_{pv} = -\frac{K}{R^2}}$

Se define la densidad superficial de carga de polarización δ_{ps} como $\delta_{ps} = \vec{P}\cdot\overrightarrow{a_R}$, por tanto:

$$\delta_{ps} = \vec{P}\cdot\overrightarrow{a_R} = \vec{P}(R=a)\cdot\overrightarrow{a_R} = \frac{K}{a} \Rightarrow \boxed{\delta_{ps} = \frac{K}{a}}$$

b) Calcular la densidad volumétrica de carga libre:

En un medio simple:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

Como sabemos $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$, despejando tenemos que $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$, sustituyendo en la ecuación de arriba llegamos a que:

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\cdot\vec{D} + \vec{P}$$

Calculando la divergencia en ambos miembros, suponiendo el medio simple:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla}\vec{D} + \vec{\nabla}\vec{P}$$

y como $\begin{cases}\vec{\nabla}\vec{D} = \delta_v \\ \vec{\nabla}\vec{P} = -\delta_{pv}\end{cases}$ la ecuación nos queda: $\delta_v = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\cdot\delta_v - \delta_{pv}$

Operando nos queda: $\delta_{pv} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\delta_v$. Sustituyendo $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, y operando:

$$\delta_{pv} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} - 1\right)\cdot\delta_v \Rightarrow \delta_{pv} = \left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)\cdot\delta_v \Rightarrow \delta_v = \left(\frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\right)\delta_{pv}$$

Como $\delta_{pv} = -K/R^2$, sustituyendo:

$$\boxed{\delta_v = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right)\frac{K}{R^2}}$$

c) Calcular el potencial dentro y fuera de la esfera:

Vamos a calcularlo mediante el Teorema de Gauss, primero calculamos el campo dentro y fuera de la esfera, y luego el potencial integrando.

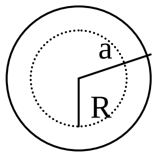
$$\oint_{s'} \vec{D} = Q_V$$

Integrando obtenemos el primer miembro de la ecuación:

$$I = \oint_{s'} \vec{D} \cdot \vec{dS};\ como\ \left\{\vec{D} \parallel \vec{dS}\right\} \rightarrow I = \oint_{s'} D \cdot dS;\ como\ \{D = cte\ en\ S'\} \rightarrow I = D \cdot \oint_{s'} dS = D \cdot 4\pi R^2$$

La carga Q_V encerrada en la superficie gaussiana variará dependiendo si estamos dentro o fuera de la esfera:

R< a



Superficie gaussiana para R<a

$$Q_V = \int_0^R \delta_V \cdot dv\,;\ \left\{dv = 4\pi R^2 dr\right\} \rightarrow Q_V = \int_0^R \delta_V \cdot 4\pi R^2 dr =$$

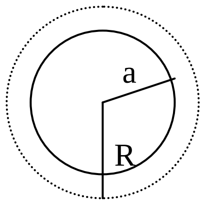
$$= \int_0^R \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right)\frac{K}{R^2} \cdot 4\pi R^2 dr = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right) 4\pi K R$$

Igualando:

$$D \cdot 4\pi R^2 = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right) 4\pi K R \Rightarrow D = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right)\frac{K}{R} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right)\frac{K}{R}\vec{a_R}}$$

Por lo que el campo será:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right)\frac{K}{R}\vec{a_R} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{K \cdot \varepsilon_r}{\varepsilon(\varepsilon_r - 1)}\frac{1}{R}\vec{a_R}}$$



Superficie gaussiana para R>a

R> a

Será toda la carga encerrada en el dieléctrico:

$$Q_V = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right) 4\pi K a$$

Igualando:

$$D \cdot 4\pi R^2 = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right) 4\pi K a \Rightarrow D = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right) 4\pi K \frac{a}{R^2} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right) 4\pi K \frac{a}{R^2}\vec{a_R}}$$

Por lo que el campo será:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\right)\frac{Ka}{R^2}\vec{a_R} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{K \cdot \varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}\frac{a}{R^2}\vec{a_R}}$$

Integrando la intensidad de campo obtenemos el potencial:

R> a

$$V = -\int \frac{K \cdot \varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}\frac{a}{R^2}\,dR = \frac{K \cdot \varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}\frac{a}{R} + C$$

Obtenemos C haciendo tender $R \rightarrow \infty$:

$$V(\infty) = \frac{K \cdot \varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}\frac{a}{R} + C \Rightarrow 0 = \frac{K \cdot \varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}\frac{a}{\infty} + C \Rightarrow C = 0$$

Por tanto, el potencial en el exterior de la esfera dieléctrica queda:

$$\boxed{V_{\text{exterior}} = \frac{K \cdot \varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}\frac{a}{R}}$$

<u>R< a</u>

$$V = -\int \frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon(\varepsilon_r - 1)}\frac{1}{R}dR = -\frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon(\varepsilon_r-1)}\ln R + C$$

Hallamos C haciendo R → a:

$$V(R=a) = -\frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon(\varepsilon_r-1)}\ln R + C \Rightarrow \frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)} = -\frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon(\varepsilon_r-1)}\ln a + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)} + \frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon(\varepsilon_r-1)}\ln a \Rightarrow C = \frac{K\cdot\varepsilon_r}{(\varepsilon_r-1)}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{\ln a}{\varepsilon}\right)$$

Sustituyendo C y simplificando:

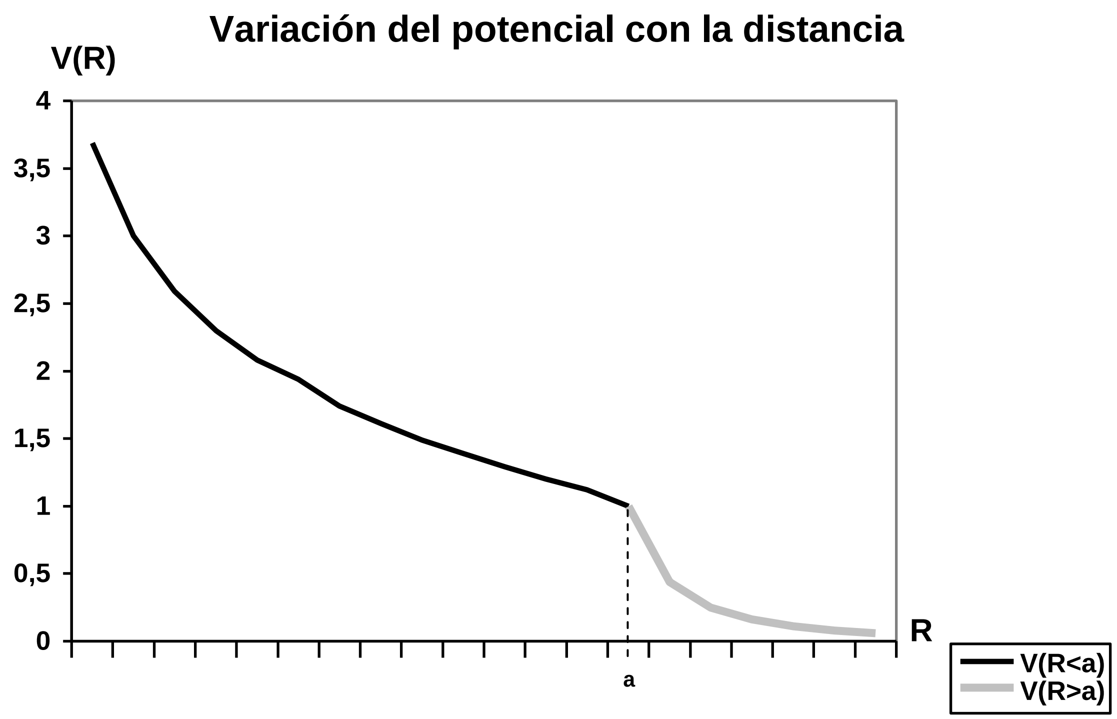
$$V = -\frac{K\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon(\varepsilon_r-1)}\ln R + \frac{K\cdot\varepsilon_r}{(\varepsilon_r-1)}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{\ln a}{\varepsilon}\right) = \frac{K\cdot\varepsilon_r}{(\varepsilon_r-1)}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{\ln a}{\varepsilon} - \frac{\ln R}{\varepsilon}\right) = \left\{\times\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$$

$$\frac{K\cdot\varepsilon_r\left(\varepsilon_r + \ln {}^{a}\!/\!_{R}\right)}{\varepsilon(\varepsilon_r-1)} = \{\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r\} = \frac{K\cdot\left(\varepsilon_r + \ln {}^{a}\!/\!_{R}\right)}{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}$$

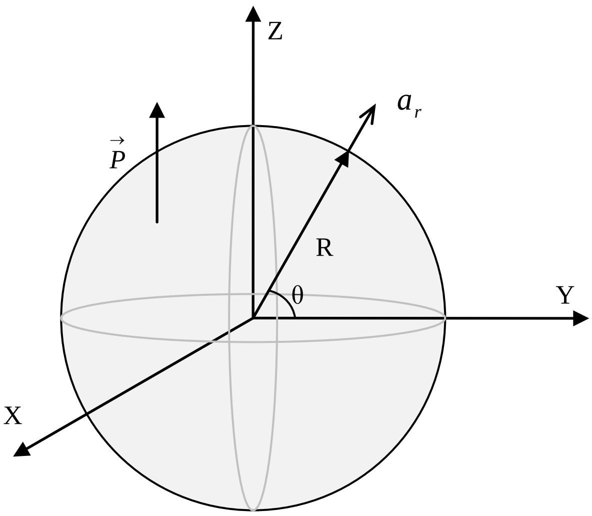
Por tanto, el potencial en el interior de la esfera dieléctrica es:

$$\boxed{V_{\text{interior}} = \frac{K\cdot\left(\varepsilon_r + \ln {}^{a}\!/\!_{R}\right)}{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}}$$

d) Representar gráficamente la variación de potencial con la distancia:



⦿ **Ejercicio 13**



a) Densidades de carga de polarización:

ρ_{ps}: densidad superficial de carga de polarización equivalente

ρ_{pv}: densidad volumétrica de carga de polarización equivalente

$$\rho_{ps} = \vec{P}\cdot\vec{a}_R = 2\cdot 10^{-6}\vec{a}_z\cdot\vec{a}_R = 2\cdot 10^{-6}\cos\theta \ \text{C/m}^2$$

$$\rho_{ps} = 2\cdot 10^{-6}\cos\theta \ \text{C/m}^2$$

$$\left.\begin{aligned}\rho_{pv} &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\\ \vec{P} &= cte\end{aligned}\right\} \quad \rho_{pv} = 0$$

b) Potencial eléctrico en el centro de la esfera

$$V_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\oint_{s'}\frac{\rho_{ps}}{r}ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{v'}\frac{\rho_{pv}}{r}dv'$$

En nuestro caso, como ρ_{pv}= 0:

$$V_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{\rho_{ps}}{r}ds'$$

En coordenadas esféricas tenemos que:

$$S' \equiv \theta\Big]_0^{\pi} \ ; \ \ \phi\Big]_0^{2\pi} \ ; \ r = R$$

$$ds' = r^2 sen\theta d\theta d\phi$$

Por tanto,

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{\pi}\frac{\rho_{ps}}{r}r^2 sen\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{R}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{\pi}2\cdot 10^{-6}\cos\theta\cdot sen\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi =$$

$$= \frac{R\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi}\underbrace{2\cos\theta\cdot sen\theta}_{sen2\theta}d\theta = \frac{10^{-6}}{4\varepsilon_o}(-\cos 2\theta)\Big]_0^{\pi} = 0$$

c) Demostración de que la carga libre en el dieléctrico es nula:

El dieléctrico es simple, o sea, lineal, homogéneo e isótropo, por lo que la permitividad relativa es constante ($\varepsilon_r = cte$). Sea ρ_v la densidad de volumen de las cargas libres. Sabemos que se cumple que:

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\vec{D} &= \rho_v\\ \vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\varepsilon_0\vec{\nabla}\vec{E}+\vec{\nabla}\vec{P} &= \rho_v\\ \vec{D} &= \varepsilon\cdot\vec{E}\\ \rho_{\rho v} &= -\vec{\nabla}\vec{P}\end{aligned}\right\}$$

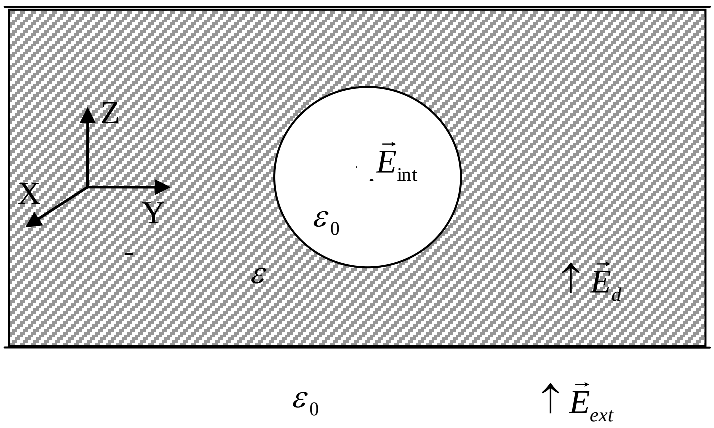
$$\varepsilon_0\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) - \rho_{pv} = \rho \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\vec{\nabla}\vec{D} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_v = \rho_v + \rho_{pv}$$

$$\rho_v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon}\rho_{pv} = 0$$

Vemos que $\rho_v = 0$ debido a que $\rho_{pv} = 0$.

⦿ **Ejercicio 14**

El problema nos dice que tenemos un dieléctrico al cual se le a hecho una cavidad esférica, como el de la figura, sin embargo, no especifica si el dieléctrico es finito o infinito de manera que vamos a considerarlo finito por hacer el problema más ceñido a la realidad.



De esta forma el campo eléctrico en el interior del dieléctrico es generado por un campo exterior al dieléctrico ($\vec{E}_{ext}$) que, por las condiciones de contorno y suponiendo que solo tiene componente normal ($\hat{a}_Z$), obtenemos de la siguiente forma:

Según las condiciones de contorno la componente normal del vector desplazamiento se conserva:

$$\vec{D}_{ext_n} = \vec{D}_{d_n}$$

Según la relación entre el vector Desplazamiento y el campo eléctrico, la componente normal del campo eléctrico externo vale:

$$\varepsilon_0 \cdot \vec{E}_{ext_n} = \varepsilon \cdot \vec{E}_{d_n}$$

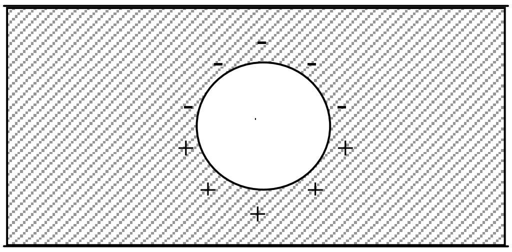
$$\boxed{\vec{E}_{ext_n} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \vec{E}_{d_n}}$$

Como solo tiene componente normal el campo del dieléctrico, el campo exterior solo tendrá componente normal:

$$\boxed{\vec{E}_{ext_n} = E_{ext_n} \cdot \hat{a}_Z = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} E_{d_n} \cdot \hat{a}_Z}$$

Para hallar el campo en el centro de la cavidad podemos hacerlo de varias formas. Yo he elegido utilizar el teorema de superposición, de esta forma, el campo en el centro de la cavidad es la suma del campo exterior con el campo producido por cargas de polarización.

Debido a la interacción del campo eléctrico con las moléculas del dieléctrico, se crean cargas de polarización en la superficie interior del dieléctrico:



Estas cargas se representan vectorialmente con el vector de polarización ($\vec{P}$) que, viene relacionado con el campo eléctrico según la siguientes expresiones:

$$\boxed{\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_d}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E}_d\end{array}\right\} \Bigg/ \begin{array}{l}\varepsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}_d \\ \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_d\end{array}$$

Lo cual significa que el vector polarización tiene la misma dirección y sentido que el campo eléctrico.

El campo eléctrico $\vec{E}_d$ es uniforme (constante según la posición), lo cual significa que su divergencia es nula. Esto implica que la divergencia de $\vec{D}$ también es nula y por consiguiente que no existe densidad de carga libre volumétrica dentro del dieléctrico (no existen cargas libres en el interior del dieléctrico):

$$\vec{E} = cte \Rightarrow \vec{D} = cte \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \rho_v = 0$$

De la misma forma la densidad volumétrica de carga de polarización la hallamos como:

$$\rho_{\pi v} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

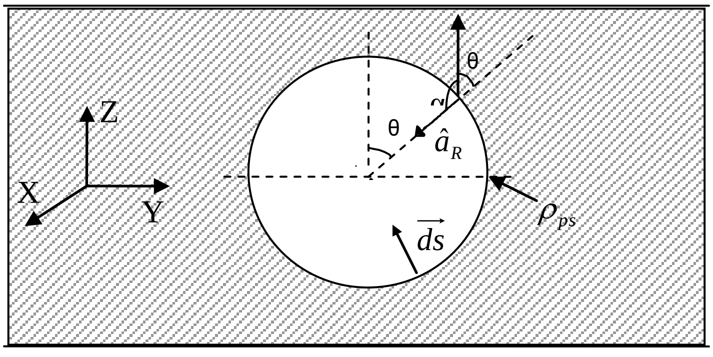
Vemos que se anula igualmente debido a la uniformidad del campo. Esto va a simplificar un poco la expresión que nos da el campo eléctrico creado por las cargas de polarización:

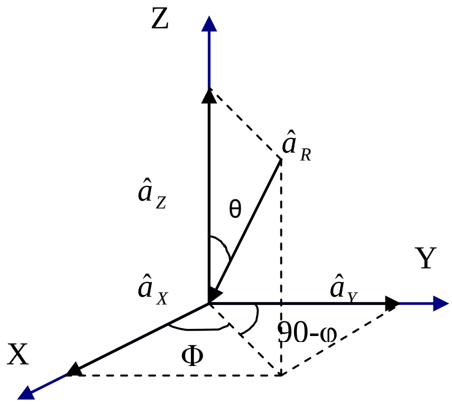
$$\vec{E}_p(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancelto{0}{\int_{v'} \frac{\rho_{pv}}{R^2}}\hat{a}_R dv' + \int_{s'} \frac{\rho_{ps}}{R^2}\hat{a}_R ds'\right]$$

Tenemos que hallar la densidad superficial de cargas de polarización ρ_{ps} a lo largo de la superficie interna del dieléctrico. Para ello utilizamos la siguiente expresión:

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n$$

Tenemos que por lo tanto hallar el producto escalar de ambos vectores para lo cual antes los definiremos:





Se deducen de las fórmulas que hallamos antes, que el vector polarización es paralelo al campo eléctrico de manera, que tendrán la misma componente vectorial. Con respecto al vector radial, decir que es un vector que va perpendicular a la superficie del dieléctrico y hacia fuera de éste. Ahora que tenemos el vector radial lo que hacemos es pasarlo de coordenadas esféricas a cartesianas para poder integrar si problemas. Para ello hacemos uso de proyecciones y de trigonometría elemental.

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{a}_R = -sen\theta\cos\phi\cdot\hat{a}_X - sen\theta\cdot sen\phi\cdot\hat{a}_Y - \cos\theta\cdot\hat{a}_Z \\ \vec{P} = P\cdot\hat{a}_Z \end{array}}$$

Ya tenemos definidos ambos vectores, ahora hacemos el producto escalar:

$$\boxed{\rho_{ps} = \vec{P}\cdot\hat{a}_n = \vec{P}\cdot\hat{a}_R = P\cos\alpha = P\cos(180^{\circ}-\theta) = -P\cos\theta}$$

Con los datos que tenemos, ya podemos hacer la integral que nos dará el campo producido por las cargas de polarización:

$$\vec{E}_p(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{\rho_{ps}}{R^2}\hat{a}_R ds' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{-P\cos\theta}{R^2}\left[-sen\theta\cos\phi\cdot\hat{a}_X - sen\theta\cdot sen\phi\cdot\hat{a}_Y - \cos\theta\cdot\hat{a}_Z\right]ds'$$

Necesitamos definir nuestra superficie de integración así como el diferencial de superficie a utilizar que, al estar trabajando con simetría esférica, será el mismo expresado en coordenadas esféricas:

$$ds' = R^2 sen\theta\cdot d\phi\cdot d\theta$$

La superficie es una esfera completa, de manera que debemos integrar según los límites siguientes:

$$s'\begin{cases} \theta\Big|_{\pi}^{0} \\ \phi\Big|_{0}^{2\pi} \end{cases}$$

Hay que fijarse que θ está definida de 0 a π. Esto se debe al eje de coordenadas definido para hacer el problema.

Continuamos pues con nuestra integral:

$$\vec{E}_p(0) = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[-\cos\theta\cdot sen\theta\cos\phi\cdot\hat{a}_X - \cos\theta\cdot sen\theta\cdot sen\phi\cdot\hat{a}_Y - \cos^2\theta\cdot\hat{a}_Z\right]\cdot$$

$$\cdot\left[R^2 sen\theta\cdot d\phi\cdot d\theta\right] =$$

$$= -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\Big[-\int_0^{2\pi}\overbrace{\cos\phi\cdot d\phi}^{sen\phi\big]_0^{2\pi}=0}\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot sen^2\theta\cdot d\theta\cdot\hat{a}_X - \int_0^{2\pi}sen\phi\cdot d\phi\underbrace{\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot sen^2\theta\cdot d\theta}_{\left.\frac{sen^3\theta}{3}\right]_{\pi}^{0}=0}\cdot\hat{a}_Y -$$

$$-\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\cdot sen\theta\, d\theta\cdot\hat{a}_Z\Big] =$$

$$= \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)E_d}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_{\pi}^{0} \hat{a}_Z = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)E_d}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] \hat{a}_Z = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)E_d}{3\varepsilon_0} \hat{a}_Z$$

Por lo tanto el campo creado por las cargas de polarización en el centro de la cavidad es:

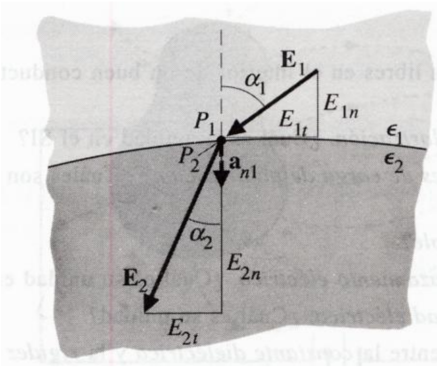
$$\boxed{\vec{E}_P(0) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)E_d}{3\varepsilon_0} \hat{a}_Z}$$

Ahora, por superposición, sumamos los campos exterior y el creado por las cargas de polarización y así obtenemos el campo total en el centro de la cavidad:

$$\vec{E}_{\text{int}}(0) = \vec{E}_P(0) + \vec{E}_{ext}(0) = \left[\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{3\varepsilon_0} E_d + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} E_d \right] \hat{a}_Z = \frac{4\varepsilon_r - 1}{3} E_d \cdot \hat{a}_Z$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}_{\text{int}}(0) = \frac{4\varepsilon_r - 1}{3} E_d \cdot \hat{a}_Z}}$$

⦿ **Ejercicio 15**



Utilizando las condiciones de contorno para los campos electrostáticos tenemos:

LA COMPONENTE NORMAL DEL CAMPO:

D_{1N} -D_{2N} = ρ_S ; como en la interface no hay carga libre: $\rho_S = 0 \Rightarrow D_{1N} = D_{2N}$

$\varepsilon_1 \cdot E_{1N} = \varepsilon_2 \cdot E_{2N} \Rightarrow \varepsilon_1 \cdot E_1 \cdot \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2 \cdot \cos\alpha_2$ (ecuación 1)

LA COMPONENTE TANGENCIAL DEL CAMPO: Sabemos que ésta se conserva

$E_{1T} = E_{2T} \Rightarrow E_1 \cdot sen\alpha_1 = E_2 \cdot sen\alpha_2$ (ecuación 2)

Para hallar la dirección del campo en el medio 2, tendremos que averiguar α_2 y para ello lo más sencillo es dividir la ecuación número (2) entre la ecuación (1):

$\frac{1}{\varepsilon_1} tg\alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} tg\alpha_2 \Rightarrow tg\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} tg\alpha_1$. Despejando:

$\boxed{\alpha_2 = arctg\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} tg\alpha_1\right)}$ y esta será la dirección que estábamos buscando

Existen dos formas posibles de calcularla magnitud del campo 2:

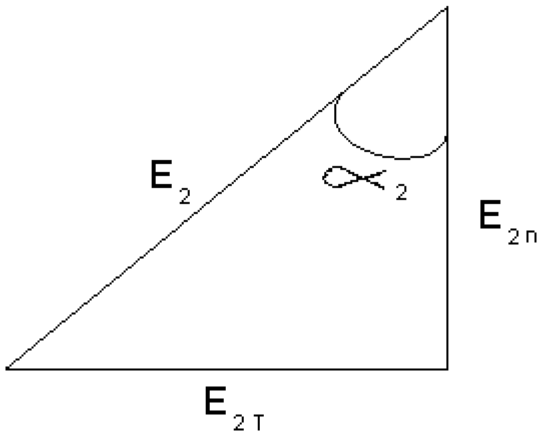
a) Operando con las ecuaciones (1) y (2): elevando las dos ecuaciones al cuadrado y multiplicando la (2) por ε_2^2, y nos quedan las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_1^2 \cdot E_1^2 \cdot \cos^2\alpha_1 = \varepsilon_2^2 \cdot E_2^2 \cdot \cos^2\alpha_2$$
$$\varepsilon_2^2 \cdot E_1^2 \cdot sen^2\alpha_1 = \varepsilon_2^2 \cdot E_2^2 \cdot sen^2\alpha_2$$

Si ahora sumamos las dos expresiones tenemos:

$E_1^2\left(\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1+\varepsilon_2^2 sen^2\alpha_1\right)=\varepsilon_2^2 E_2^2$, donde en el segundo miembro de la ecuación se tuvo en cuenta que: sen ^{2} α_2+ cos ^{2} α_2= 1. Por último, despejando E_2 :

Utilizando el teorema de pitágoras



$$E_2=\sqrt{E_{2N}^2+E_{2T}^2}=\sqrt{(E_2 sen\alpha_2)^2+(E_2\cos\alpha_2)^2}=\sqrt{(E_1 sen\alpha_1)^2+(\varepsilon_1/\varepsilon_2\, E_1\cos\alpha_1)^2}$$

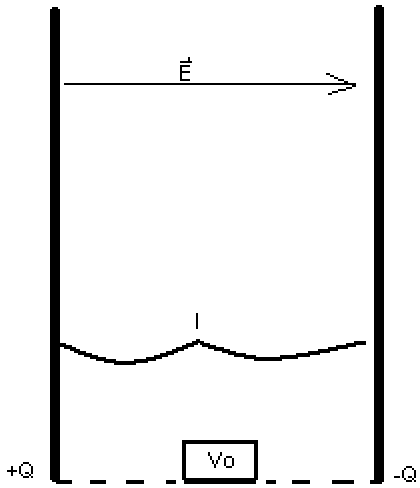
$$\boxed{E_2=E_1\cdot\sqrt{sen^2\alpha_1+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cdot\cos\alpha_1\right)^2}}$$

y comprobamos que nos da el mismo resultado.

⊙ Ejercicio 16

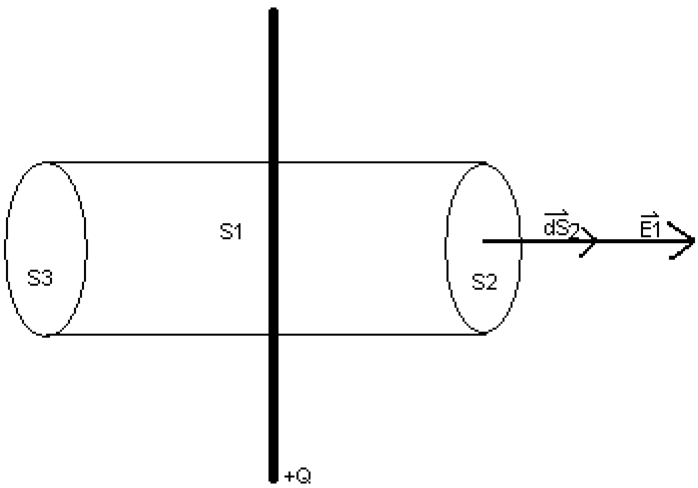
El problema especifica que se desprecien los efectos de borde. Esto quiere decir que las láminas están muy juntas y se tratan como planos infinitos, con lo que podemos suponer que el campo en la región interna del condensador es uniforme. Si hubiésemos considerado el efecto de borde el campo no hubiera sido uniforme en los extremos de las placas.

Al tener una diferencia de potencial, entre las placas ambas quedan cargadas con una carga +Q y –Q respectivamente.



Campo

Aplicando Gauss a la primera placa (+Q) para conocer el aporte que realiza al campo de la región interna:



$$\int_S \vec{E_1} d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{E_1} d\vec{s_1} + \int_{S_2} \vec{E_1} d\vec{s_2} + \int_{S_3} \vec{E_1} d\vec{s_3} = 2\int_{S_2} \vec{E_1} d\vec{s_2} = 2\int_{S_2} E_1 ds_2 = 2E_1 \Delta S$$

$$2E_1 \Delta S = \frac{Qv}{\varepsilon_o}, 2E_1 \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\varepsilon_o}, E_1 = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}$$

$$\boxed{\vec{E_1} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o} \vec{a_x}}$$

El razonamiento a seguir con la segunda placa (-Q) es análogo, de manera que:

$$\vec{E_2} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o} \vec{a_x} = \vec{E_1}$$

y sumando los aportes de la placa (+Q) y (-Q), obtenemos que el campo en la región interna del condensador es:

$$\vec{E_1} + \vec{E_2} = \boxed{\frac{\rho_s}{\varepsilon_o} \vec{a_x} = \vec{E}}$$

Densidad de carga

Para calcular la densidad de carga superficial en las placas nos ayudamos de que ya conocemos el potencial (es un dato del problema), conocemos el campo y conocemos la expresión que relaciona campo y potencial:

$$V_o = -\int_0^l \vec{E} \vec{dl} = -\int_0^l -E dl = E \int_0^l dl = El$$

$$E = \frac{V_o}{l}, \frac{\rho_s}{\varepsilon_o} = \frac{V_o}{l}, \boxed{\rho_s = \frac{V_o \varepsilon_o}{l}}$$

Energía

La energía se puede calcular de dos maneras. Una de ellas es utilizando la fórmula de la energía en un condensador:

$$W = \frac{1}{2} QV$$

que utilizaremos más adelante. El segundo camino que podemos seguir para su cálculo es la utilización de la fórmula general:

$$W = \frac{1}{2} \int_\infty \vec{D} \vec{E} dV$$

teniendo en cuenta que el medio es lineal, es decir:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Resolviendo por este método:

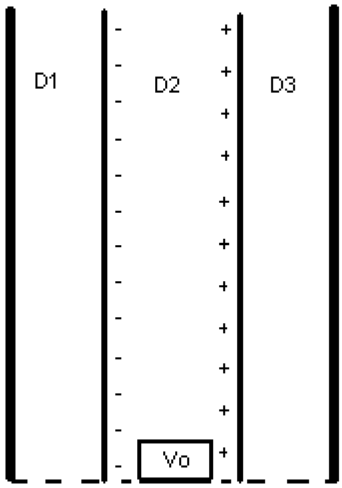
$$\frac{1}{2}\int_{\infty} \varepsilon_o E^2 dv = \frac{1}{2}\int_{dentro} \varepsilon_o E^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 \int_{dentro} dv = \frac{1}{2}\varepsilon_o \frac{\rho_s^2}{\varepsilon_o^2} Sl = \boxed{\frac{S V_o^2 \varepsilon_o}{2l} = W}$$

Capacidad

$$C = \frac{Q}{V}, C = \frac{Q}{V_o}, C = \frac{\rho_s S}{\frac{\rho_s l}{\varepsilon_o}} = \boxed{\frac{\varepsilon_o S}{l} = C}$$

b)

Manteniendo la diferencia de potencial que existía entre las placas del condensador se introduce ahora un dieléctrico de la siguiente forma:



Al polarizarse el dieléctrico se anulan las cargas de los dipolos interiores y sólo quedan las cargas externas en la superficie del mismo. Estas cargas no son libres, son cargas ligadas.

Al haber introducido un dieléctrico en el interior del campo manteniendo el potencial constante, obtendremos una variación en la densidad de carga que contrarreste el efecto del dieléctrico.

Campo

Sabemos que una de las condiciones de contorno en la superficie que separa dos medios es:

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

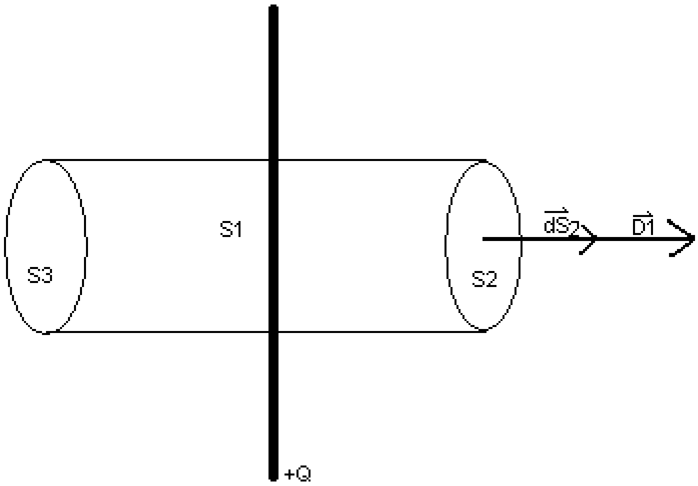
Aplicando esto a las caras externas del dieléctrico, y teniendo en cuenta que la densidad de carga libre en su superficie es 0, obtenemos la siguiente condición de contorno para las dos superficies que separan el dieléctrico de los huecos:

$$D_{1n} = D_{2n}, D_{2n} = D_{3n}$$

y por tanto:

$$D_{1n} = D_{2n} = D_{3n}$$

Además en este caso $\overrightarrow{D_1} = D_{1n}, \overrightarrow{D_2} = D_{2n}, \overrightarrow{D_3} = D_{3n}$, al ser los vectores $\vec{D}$ perpendiculares a las superficies entre medios. De esta forma sólo tendremos que calcular uno de los D para conocerlos todos. Calculamos D_1:



Suponiendo que el flujo de campo eléctrico en S_3 es 0 al anularse el flujo producido por +Q con el de –Q:

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} = \int_S \overrightarrow{D_1} d\overrightarrow{s_2} = \int_S D_1 ds_2 = D_1 \Delta S$$

$$D_1 \Delta S = Q_v, D_1 \Delta S = \rho_s \Delta S, D_1 = \rho_s \Rightarrow \boxed{D_1 = D_2 = D_3 = \rho_s}$$

de aquí obtenemos:

$$D_1 = \varepsilon E_1 = \rho_s, \varepsilon_0 E_1 = \rho_s, \boxed{E_1 = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}}$$

$$D_2 = \varepsilon E_2 = \rho_s, \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2 = \rho_s, \boxed{E_2 = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

$$D_3 = \varepsilon E_3 = \rho_s, \varepsilon_0 E_3 = \rho_s, \boxed{E_3 = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}}$$

Densidad de carga

La hallamos a través del potencial, que sigue siendo el dato del problema, y la expresión que ya conocemos del apartado a) que nos relaciona campo y potencial $V = El$:

$$V_o = E_1 \frac{l}{4} + E_2 \frac{l}{2} + E_3 \frac{l}{4} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_o}\frac{l}{4} + \frac{\rho_s}{\varepsilon_o \varepsilon_r}\frac{l}{2} + \frac{\rho_s}{\varepsilon_o}\frac{l}{4} = \frac{\rho_s l}{2\varepsilon_o}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\rho_s l}{\varepsilon_o}\left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_s = \frac{V_o \varepsilon_o}{l}\left(\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\right), \boxed{\rho_s = \rho_{s_0}\left(\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\right)}$$

siendo ρ_{s_o} la densidad de carga en las placas antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

Energía

Utilizaremos ahora la fórmula de la energía de un condensador:

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2}\rho_s S V_o = \frac{V_o S}{2}\frac{V_o \varepsilon_o}{l}\left(\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\right), \boxed{W = W_o\left(\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\right)}$$

siendo W_o la energía del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

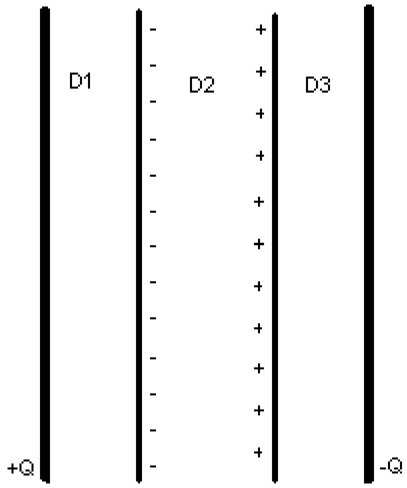
Capacidad

$$C = \frac{Q}{V}, C = \frac{Q}{V_o}, C = \frac{\rho_s S}{V_o} = \frac{\varepsilon_o S}{l}\left(\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\right) = \boxed{C_o\left(\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\right) = C}$$

siendo C_o la capacidad del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

c)

En este apartado consideramos que, antes de insertar el dieléctrico en la región interna del condensador, la fuente de tensión ha sido desconectada. De esta manera la carga que ya existía en las placas va a permanecer constante (igual que en el apartado a)) y lo que cambia ahora para contrarrestar el efecto del dieléctrico es el potencial.



Campo

El campo en los huecos y en el dieléctrico va a seguir teniendo las mismas expresiones que calculamos en el apartado b):

$$\boxed{E_{hue} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_o}, E_{die} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_o \varepsilon_r}}$$

Densidad de carga

Se mantiene igual que antes de insertar el dieléctrico (apartado a)):

$$\boxed{\rho_s = \frac{V_o \varepsilon_o}{l}}$$

Energía

Para calcular la energía por la fórmula de la energía en un condensador necesitamos conocer el potencial. Lo calculamos a partir de la relacion $V = El$ y las expresiones conocidas de E:

$$V = E_1\frac{l}{4} + E_2\frac{l}{2} + E_3\frac{l}{4} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_o}\frac{l}{4} + \frac{\rho_s}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{l}{2} + \frac{\rho_s}{\varepsilon_o}\frac{l}{4} = \frac{\rho_s l}{2\varepsilon_o}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\rho_s l}{\varepsilon_o}\left(\frac{\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}\right) = \boxed{V_o\left(\frac{\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}\right) = V}$$

así tenemos:

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\rho_s S\frac{\rho_s l}{\varepsilon_o}\left(\frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}\right) = \frac{V_0^2 S\varepsilon_o}{2l}\left(\frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}\right) = \boxed{W_o\left(\frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}\right) = W}$$

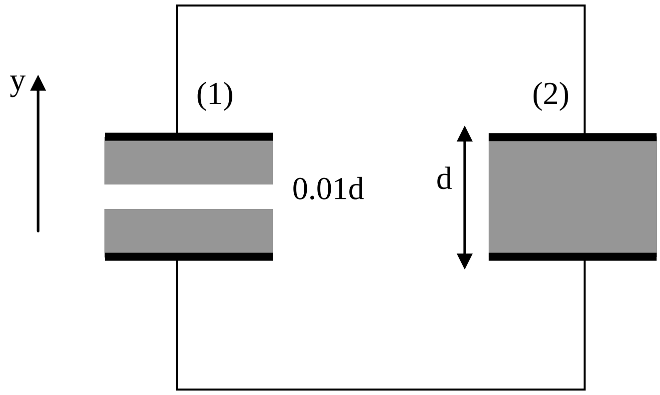
siendo W_o la energía del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

Capacidad

$$C = \frac{Q}{V}, C = \frac{Q}{V_o\left(\frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}\right)} = \frac{\rho_s S}{V_o}\left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right) = \frac{V_o\varepsilon_o S}{lV_o}\left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right) = \frac{\varepsilon_o S}{l}\left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right) = \boxed{C_0\left(\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right) = C}$$

siendo C_o la capacidad del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

⦿ Ejercicio 17



a) Antes de la fractura :

Los dos condensadores son iguales y están sometidos la misma tensión, entonces:

$E_1 = E_2 = Vo / d \ (- a_y)$
$D_1 = D_2 = \varepsilon E = \varepsilon (Vo/d) = 100\ \varepsilon o (Vo/d) (- a_y)$

b) Después de la fractura:

Como la fractura se produce después de haber desconectado la batería, la carga total en las placas se conserva.

Qt antes = Qt después

Hallando la carga antes de la fractura :

$Qa_1 = Qa_2 = \rho S = \varepsilon E S = 100\ \varepsilon o (Vo/d)$

$$\mathbf{Qtotal = Qa_1 + Qa_2 = 200\ \varepsilon o\ S (Vo / d)} \qquad (1)$$

Mientras que para la carga después de la fractura se ha de considerar que en el condensador 1 existen dos campos eléctricos: Ed_1 (campo en el dieléctrico) y Ef_1 (campo en la fractura), que vienen dados por:

$Qd_1 = \varepsilon Ed_1 S$
$Qd_2 = \varepsilon E_2 S$

Con lo que la carga total será:

$$\mathbf{Qtotal = Qd_1 + Qd_2 = \varepsilon S (Ed_1 + E_2)} \qquad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) :

$200\ \cancel{S\ \varepsilon o} (Vo / d) = 100\ \cancel{\varepsilon o\ S} (Ed_1 + E_2)$

Así,

$$\mathbf{(Ed_1 + E_2) = 2 (Vo/d)} \qquad (3)$$

Además, si llamamos V a la tensión de los condensadores tras la fractura, se ha de cumplir que:

$V = Ed_1\, d + Ef_1\, 0.01d$

$V = E_2\, d$

Para (1) y (2) respectivamente. Por tanto:

$Ed_1 \cancel{d} + Ef_1\, 0.01\cancel{d} = E_2 \cancel{d}$

$$\mathbf{Ed_1 + Ef_1\, 0.01 = E_2} \qquad (4)$$

Por otro lado, aplicando la continuidad del desplazamiento eléctrico entre el dieléctrico y la fractura del condensador (1), asumiendo que no existen cargas libres superficiales, y teniendo en cuenta que los vectores desplazamiento eléctrico son normales a las placas:

$Dd_1 = Df_1 \longrightarrow \varepsilon\, Ed_1 = Ef_1\, \varepsilon o \longrightarrow 100\, \cancel{\varepsilon o} Ed_1 = Ef_1\, \cancel{\varepsilon o}$

$$\mathbf{100\, Ed_1 = Ef_1} \qquad (5)$$

Las expresiones (3), (4) y (5) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si las resolvemos nos da como resultado:

$\vec{\mathbf{E}}\mathbf{d_1 = 2Vo/\, 3d\, (-\vec{a}_y)}$

$\vec{\mathbf{E}}_2 \mathbf{= 4Vo / 3d\, (-\vec{a}_y)}$

$\vec{\mathbf{E}}\mathbf{f_1 = 200Vo / 3d\, (-\vec{a}_y)}$

$\vec{\mathbf{D}}\mathbf{d_1 = 100\, \varepsilon o Ed_1 = 200\, \varepsilon o\, Vo / 3d\, (-\vec{a}_y)}$

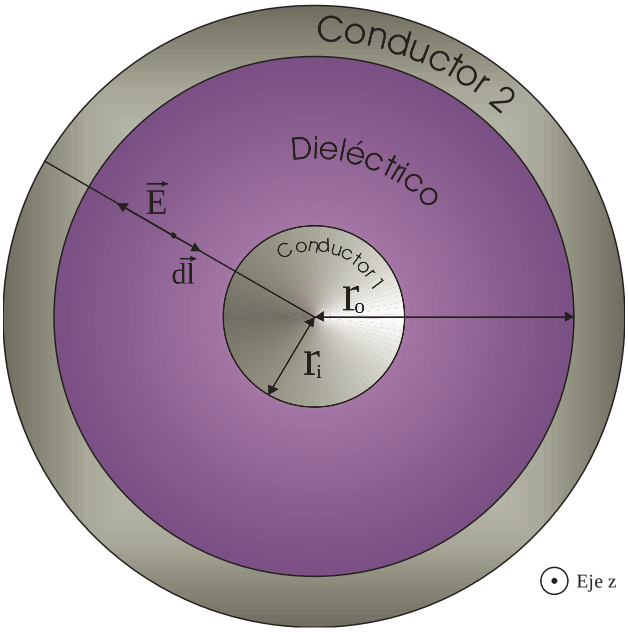
$\vec{\mathbf{D}}\mathbf{f_1 = \varepsilon o Ef_1 = 200\, \varepsilon o\, Vo / 3d\, (-\vec{a}_y)}$

b) El potencial entre las placas lo podemos calcular en el condensador (2) como:

$V = E_2\, d = 4Vo\, d/ 3d = 4Vo / 3$

⦿ Ejercicio 18

Un esquema de la sección transversal del cable coaxial es el mostrado en la figura.

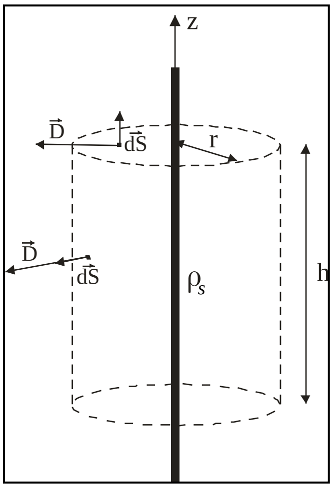


Las especificaciones de partida son:

- En el conductor 2:
  - $r_i = 2{\cdot}10^{-3}$ m
  - $V = V_i$
- En el conductor 2:
  - $V = V_o$
- En el dieléctrico:
  - $\varepsilon_r = 2.6$
  - Rig. Dieléctrica = $20{\cdot}10^6$ V/m
  - $E_{max} = 0.25 \cdot 20 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^6$ V/m
- $V_i - V_o = 10$ kV $= 10^4$ V

Lo primero que debemos hacer es hallar como se distribuye el campo eléctrico en el dieléctrico. Aplicando el principio de superposición, este campo es la suma del campo creado por el conductor interior y el creado por el conductor exterior:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



Calculemos primero el vector desplazamiento eléctrico: $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$, que generan ambos conductores, y utilicémoslo para calcular el campo. Para ello eliminemos primero el conductor 2.

El desplazamiento $\vec{D}_1$ podemos hallarlo aplicando la generalización de la Ley de Gauss: $\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_v$, donde S es una superficie cerrada cualquiera y Q_v es la carga libre encerrada dentro de la superficie. Así, considerando que el conductor 1 tiene una densidad superficial de carga ρ_s, elegiremos como superficie gaussiana un cilindro coaxial al conductor, de radio r y altura arbitraria h.

Por simetría, y como suponemos que el medio circundante (dieléctrico) es simple, el vector desplazamiento eléctrico será radial y su módulo sólo dependerá de la distancia r al eje z: $\vec{D}_1 = D_{1r}\vec{a}_r$. Sólo existirá flujo a través de la superficie lateral del cilindro, ya que en las tapas $\vec{D}$ es perpendicular a $d\vec{S}$ y su producto escalar será nulo. Por otra parte, en la superficie lateral ambos vectores son paralelos y su producto escalar equivale al producto de sus módulos. Así:

$$\oint_s \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S.Lat.} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S.Lat.} D_{1r} \cdot dS$$

Como r es constante en todos los puntos de la superficie lateral, D también es constante y puede salir de la integral, por lo que:

$$\int_{S.Lat.} \mathrm{D_{1r}} \cdot \mathrm{dS} = \mathrm{D_{1r}} \int_{S.Lat.} \mathrm{dS} = 2\pi \mathrm{rhD_{1r}}$$

Por otra parte, la carga $\mathrm{Q_v}$ encerrada en el cilindro vale, teniendo en cuenta que la densidad superficial de carga se distribuye uniformemente:

$$\mathrm{Q_v} = \rho_s \mathrm{S} = \rho_s 2\pi \mathrm{r_i h}$$

Y aplicando la Ley de Gauss:

$$2\pi \mathrm{rhD_{1r}} = \rho_s 2\pi \mathrm{r_i h} \;\Rightarrow\; \mathrm{D_{1r}} = \rho_s \frac{\mathrm{r_i}}{\mathrm{r}} \;\Rightarrow\; \vec{\mathrm{D}}_1 = \rho_s \frac{\mathrm{r_i}}{\mathrm{r}} \vec{\mathrm{a}}_\mathrm{r}$$

Calculemos ahora la contribución del conductor 2. Al eliminar el conductor 1, es fácil advertir que el vector desplazamiento eléctrico creado por un cilindro hueco como el conductor 2 es nulo en su interior, ya que si aplicamos la Ley de Gauss, la carga libre encerrada por cualquier superficie cerrada contenida en el interior del cilindro es cero y, por tanto, el desplazamiento es nulo:

$$\vec{\mathrm{D}}_2 = \vec{0}.$$

Así, el desplazamiento eléctrico en el interior del dieléctrico se debe sólo al conductor interior: $\vec{\mathrm{D}} = \vec{\mathrm{D}}_1$. El dieléctrico es un medio simple, y esto nos permite escribir:

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{\vec{\mathrm{D}}}{\varepsilon} = \frac{\vec{\mathrm{D}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} \;\Rightarrow\; \vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho_s \mathrm{r_i}}{\mathrm{r}\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} \vec{\mathrm{a}}_\mathrm{r}$$

Dado que el campo eléctrico en el dieléctrico es inversamente proporcional a la distancia r al eje del cable, el campo máximo se producirá para la distancia mínima, es decir, en la superficie del conductor interior ($\mathrm{r} = \mathrm{r_i}$):

$$\mathrm{E_{max}} = \mathrm{E(r_i)} = \frac{\rho_s \mathrm{r_i}}{\mathrm{r_i}\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} \le 5 \cdot 10^6 \;\mathrm{V/m}$$

Esto nos permite hallar la siguiente condición para la densidad de carga, ρ_s:

$$\rho_s \le \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} 5 \cdot 10^6 \;\mathrm{C/m^2}$$

La diferencia de potencial entre dos puntos viene dada por:

$$\mathrm{V_o} - \mathrm{V_i} = -\int_{r_i, C}^{r_o} \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}\,,$$

donde podemos elegir cualquier camino C. Lo más sencillo es integrar a lo largo del camino señalado en el esquema de la sección transversal del cable (en la dirección radial), donde $\vec{\mathrm{E}}$ es paralelo y de sentido opuesto a $\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}$:

$$\mathrm{V_o} - \mathrm{V_i} = -\int_{r_i}^{r_o} \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = \int_{r_i}^{r_o} \mathrm{E} \cdot \mathrm{dr} = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\rho_s \mathrm{r_i}}{\mathrm{r}\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} \mathrm{dr} = \frac{\rho_s \mathrm{r_i}}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} (\ln \mathrm{r_o} - \ln \mathrm{r_i}) = 10^4 \;\mathrm{V}$$

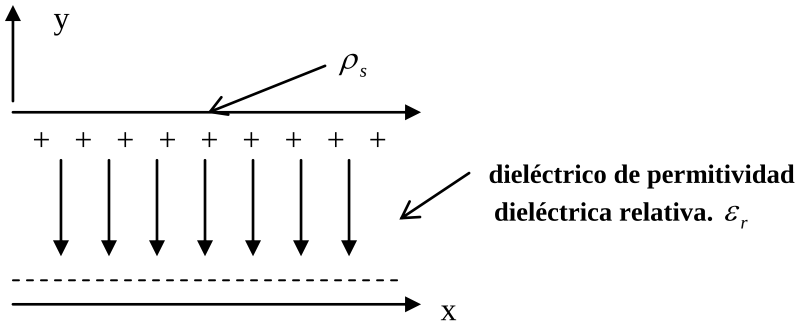
Despejemos ρ_s para obtener la condición que ha de cumplir $\mathrm{r_o}$:

$$\rho_s = \frac{10^4 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}}{\mathrm{r_i}(\ln \mathrm{r_o} - \ln \mathrm{r_i})} \le \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} 5 \cdot 10^6 \;\Rightarrow\; \ln \mathrm{r_o} - \ln \mathrm{r_i} \ge 1 \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{r_o} \ge \mathrm{e}^{1+\ln(0.002)} \simeq 0.0054 \;\mathrm{m} = 5.4 \;\mathrm{mm}$$

Así que el conductor externo debe tener un radio interior menor o igual que 5.4 mm, para asegurar que el campo eléctrico en el aislante no supera el 25% de su rigidez dieléctrica.

⦿ Ejercicio 19



Se nos pide la capacidad, C, que se obtiene como $C = \dfrac{Q}{V}$. Calcularemos V a partir del campo e integrando.

Suponiendo que las cargas se distribuyen uniformemente tendremos una densidad superficial en cada placa $+\rho_s$ y $-\rho_s$, donde:

$$Q = \rho_s \cdot S \quad \to \rho_s = \frac{Q}{S}$$

Las condiciones de contorno entre el dieléctrico y las placas vienen dadas por:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \to E_1 = E_{1n};\, E_2 = E_{2n}$$
$$\left(D_{1n} - D_{2n}\right) = \rho_s$$

indicando con 1 el dieléctrico y con 2 el metal. Como en los metales no existe campo en su interior:

$$E_{2n} = E_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad D_{1n} = \varepsilon \cdot E_{1n} = \varepsilon \cdot E_1 = \rho_s$$

Entonces, como $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$$E_1 = \frac{\rho_s}{\varepsilon} = \frac{\rho_s}{S\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

Cálculo de V_{12} :

$$V_{12} = \int_{y=0}^{y=d} E dy = \int_0^d \left(dy \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \right). = \int_0^d \Big(\frac{Q}{\varepsilon_0 S . \frac{1}{1 - \frac{y^2}{3d^2}}} \Big) dy = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \int_0^d \frac{1}{\frac{3d^2}{3d^2 - y^2}} dy =$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\int_0^d \frac{3d^2 - y^2}{3d^2}\,dy = \frac{Q}{\varepsilon_0 S \cdot 3d^2}\int_0^d 3d^2 - y^2 dy =$$

$$= \frac{Q}{3\varepsilon_0 S d^2}\left[\int_0^d 3d^2 dy - \int_0^d y^2 dy\right] = \frac{Q}{3\varepsilon_0 S d^2}\left[3d^2 \cdot \left(y \Big|_0^d\right) - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^d\right] =$$

$$= \frac{Q}{3\varepsilon_0 S d^2}\left[3d^3 - \frac{d^3}{3}\right] = \frac{Q}{3\varepsilon_0 S d^2}\left[\frac{9d^3 - d^3}{3}\right] = \frac{Q}{3\varepsilon_0 S d^2}\left[\frac{8d^3}{3}\right] = \frac{Q \cdot 8d^3}{9\varepsilon_0 S d^2} = \frac{8Qd}{9\varepsilon_0 S} = V_{12}$$

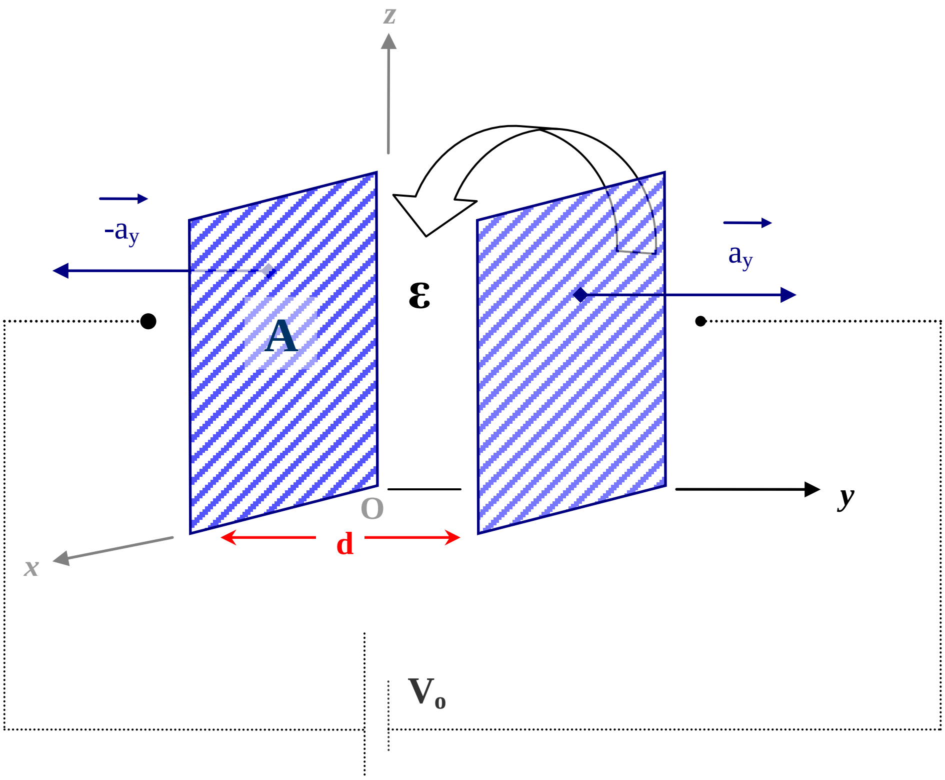
$$V_{12} = \frac{8Qd}{9\varepsilon_0 S}\,(Voltios)$$

Calcularemos ahora la capacidad como:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{8Qd}{9\varepsilon_0 S}} = \frac{Q \cdot 9 \cdot \varepsilon_0 S}{8Qd} = \frac{9\varepsilon_0 S}{8d} \quad , \quad C = \frac{9\varepsilon_0 S}{8d}\,(Faradios)$$

⦿ Ejercicio 20

Según los datos del problema tenemos la siguiente distribución:



a) Para determinar el campo eléctrico ($\vec{E}$), el desplazamiento eléctrico ($\vec{D}$) y el vector polarización ($\vec{P}$), utilizaremos las siguientes relaciones:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{(ecuación 1)}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{(ecuación 2)}$$

$$\vec{\nabla} D = \rho_v \quad \text{(ecuación 3)}$$

El enunciado nos dice que el dieléctrico no contiene cargas libres en su interior. Como el problema es unidimensional, la ecuación 3 implica que $\vec{D}$ es constante dentro del condensador:

$$\vec{\nabla} D = \frac{\partial D}{\partial y} = 0 \rightarrow \underline{\underline{D = cte}}$$

Por otro lado, como el campo es conservativo:

$$\int_C E \cdot dl = -\Delta V \text{ , donde } \begin{cases} -\Delta V = V_0 \\ C \equiv y \in [0, d] \end{cases}$$

De la ecuación 2 despejamos $\vec{E}$ y sustituyendo el resultado en la integral anterior:

$$dl = dy$$

$$\int_0^d \frac{D}{\varepsilon} \cdot dl = V_0\text{, donde } \begin{cases} D \equiv cte \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \dfrac{y}{d} \end{cases}$$

$$\frac{D}{\varepsilon_0} \int_0^d \frac{dl}{(1 + y/d)} = V_0 \rightarrow \frac{D}{\varepsilon_0} d \ln(1 + \frac{y}{d})\Big]_0^d = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} d \ln(2)$$

$$D = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)} \Rightarrow \vec{D} = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)} \vec{a}_y$$

La expresión obtenida para $\vec{D}$ la sustituimos en la <u>ecuación 2</u> y así conseguimos determinar $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{D}{\varepsilon}\text{, con } \begin{cases} D = \dfrac{V_0}{\varepsilon_0} d \ln(2) \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \dfrac{y}{d} \end{cases} \longrightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{d \ln(2)[1 + y/d]} \vec{a}_y$$

Despejando el vector de polarización en la <u>ecuación 1,</u> y sustituyendo las expresiones halladas para $\vec{D}$ y $\vec{E}$, se tiene que:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$P = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{y}{d + y} \Rightarrow \vec{P} = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{y}{d + y} \vec{a}_y .$$

b) Calculo de las densidades de polarización.

· Densidad de carga volumétrica:

$$\rho_{PV} = -\vec{\nabla} \vec{P}$$

$$-\vec{\nabla} \vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial y} \equiv -\frac{V_0 \varepsilon_0}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{(d + y)^2}$$

· Densidad de carga superficial en el dieléctrico: $\rho_{PS} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$

(1) en el origen, y=0:

$$\rho_{PS} = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{(0)}{d + (0)} \cdot (-\vec{a}_y) = \underline{\underline{0}}$$

(2) en y=d:

$$\rho_{PS} = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{(d)}{d + (d)} \cdot \vec{a}_y = \frac{V_0 \varepsilon_0}{2d \ln(2)} \cdot \vec{a}_y$$

c) Calculo de la capacidad.

Utilizaremos la siguiente fórmula: $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$

Donde $\Delta V = V_0$, y Q es la carga en cada placa, que vendrá dada por:

$$Q_v = \rho_S \cdot A$$

Siendo ρ_S la densidad superficial de cargas libres en las placas, y A la superficie de dichas placas. Por otro lado, sabemos que a partir de la condición de contorno para el desplazamiento eléctrico entre cada placa y el dieléctrico, se cumple para ρ_S :

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$$

Como en un metal el campo eléctrico es nulo: $D_{2n} = \varepsilon_0 \cdot E_{2n} = \underline{\underline{0}}$

$$\rightarrow \rho_S = D_{1n} = D_1 = D$$

Por coincidir la componente normal del campo eléctrico con su modulo. Así,

$$\rho_S = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)} \qquad Q_v = \rho_S \cdot A = \frac{A V_0 \varepsilon_0}{d \ln(2)}.$$

(Para la carga de la segunda placa, el resultado seria lo mismo con el signo opuesto, ya que D_{1n} seria el del metal y D_{2n} el del dieléctrico).

Una vez calculada la carga, la capacidad del condensador será:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A V_0 \varepsilon_0 / d \ln(2)}{V_0} = \frac{A \varepsilon_0}{d \ln(2)}$$

⦿ **Ejercicio 21**

Expresiones que contienen ρ_V y ρ_{Pv}:

a) $\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_V$, como $\vec{D} = \left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)$ queda $\vec{\nabla}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_V$ llegando a $\vec{\nabla}\varepsilon_0\vec{E} + \vec{\nabla}\vec{P} = \rho_V$. Con la consideración de que $\vec{\nabla}\vec{P} = -\rho_{Pv}$ obtenemos: $\vec{\nabla}\varepsilon_0\vec{E} - \rho_{Pv} = \rho_V$

b) $\vec{\nabla}E = \dfrac{\rho_V + \rho_{Pv}}{\varepsilon_0}$

Ahora bien, según el enunciado del problema $\rho_V = 0$, cuya sustitución en cualquiera de las ecuaciones anteriores nos da el resultado de:

$$\boxed{\varepsilon_0\vec{\nabla}\vec{E} = \rho_{Pv}}.$$

Con lo que demostramos que en un dieléctrico existe densidad volumétrica de carga ligada en ausencia de carga libre. Ahora obtengamos su valor. Al ser el medio lineal se cumple:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \ ,$$

expresión que llevada a las ecuaciones del principio lleva a que

$$\vec{\nabla}\left(\varepsilon\vec{E}\right) = 0 \ .$$

Desarrollando el operador $\vec{\nabla}$, al ser el medio no homogéneo:

$$\varepsilon\vec{\nabla}\vec{E} + \vec{E}\vec{\nabla}\varepsilon = 0 \ ,$$

quedando finalmente la expresión

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{-\vec{E}\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon} \ ,$$

que sustituida en

$$\varepsilon_0\vec{\nabla}\vec{E} = \rho_{Pv}$$

se obtiene

$$\varepsilon_0\left(\frac{-\vec{E}\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \rho_{Pv} \ .$$

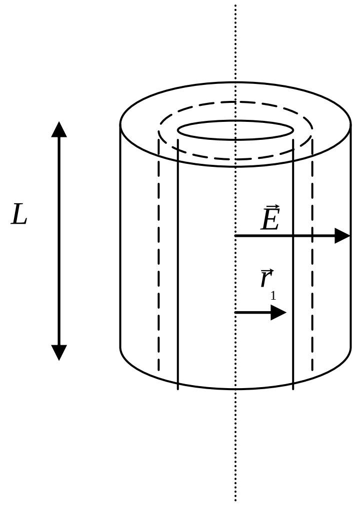
Haciendo el cambio $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ se llega al resultado final:

$$\varepsilon_0\left(\frac{-\vec{E}\vec{\nabla}\varepsilon_0\varepsilon_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) = \rho_{Pv}$$

cuya simplificación es igual al resultado de las soluciones:

$$\boxed{\varepsilon_0\left(\frac{-\vec{E}\vec{\nabla}\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right) = \rho_{Pv}}$$

⦿ **Ejercicio 22**



Nos piden la relación de la permitividad relativa que permita que el módulo del campo sea independiente de r. Para ello hallaremos primero el campo eléctrico entre los dos cilindros, suponiendo que en la superficie externa del conductor interior hay una carga superficial -*Q*, y en la superficie interna del conductor exterior +*Q*..

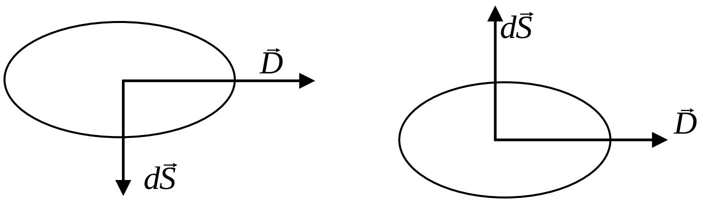
Sabiendo que:

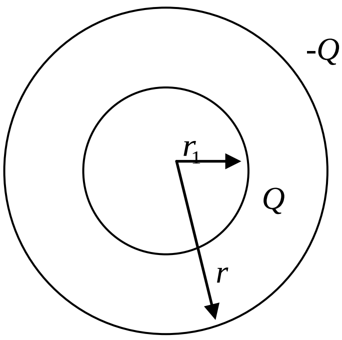
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad \Rightarrow \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Por el postulado fundamental:

$$\oint_S \vec{D} \quad d\vec{S} = Q_V$$

Donde S representa la superficie a trazos de la figura (la suma de las tapas más el lateral). En las tapas el vector **D** es perpendicular al vector **dS** Y por lo tanto se anulan. Por lo tanto, sólo se calcula el flujo a través de la superficie lateral.





$$\int_{S_{lateral}} DdS = D \int_{S_{lateral}} dS = DS_{lateral} = D2\pi rL$$

$$D2\pi rL = Q_v \qquad D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \Rightarrow E = \frac{Q_v}{2\pi rL\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Para que E sea independiente del radio, el dieléctrico ha de ser sea inhomogéneo, con:

$$\varepsilon_r \propto \frac{1}{r} \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_r = \frac{K}{r}}$$

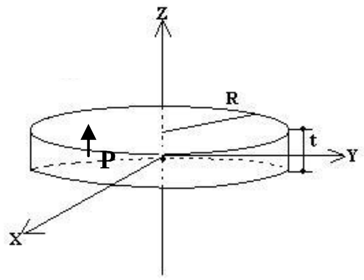
Con lo que el campo queda: $\vec{E} = \dfrac{Q_v}{2\pi KL\varepsilon_0 \varepsilon_r} \vec{a}_r$

Ahora nos preguntan por la densidad volumétrica de carga.

$$\rho_{pv} = -\vec{\nabla}\vec{P} = -\vec{\nabla}\left(\varepsilon_o \cdot \left(\varepsilon_r - 1\right) \cdot \vec{E}\right) = -\vec{\nabla}\left(\frac{k-r}{r} \cdot \frac{Q}{2\pi KL} \cdot \vec{a}_r\right) =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi KL} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{k-r}{r} \cdot \vec{a}_r\right) = -\frac{Q}{2\pi KL} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(r \cdot \frac{k-r}{r}\right) = \frac{Q}{2\pi KLr}$$

⦿ Ejercicio 23



Un electrete es un dieléctrico que se conserva polarizado indefinidamente, después de ser sometido a un campo eléctrico intenso. La polarización da lugar a una carga positiva neta en una de las caras y negativa en la otra.

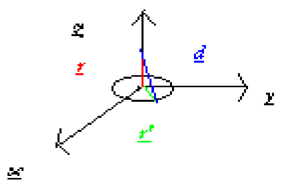
Teniendo en cuenta que

$$\vec{P} = P * \vec{u}_z$$

y que la carga por unidad de área sobre la superficie de un material polarizado es igual a la componente de la polarización que está en la dirección de la normal a la superficie del material, podemos considerar que $P = \sigma_p$ (en la cara superior).

En el interior del electrete, al ser la polarización uniforme, no existe densidad volumétrica de carga de polarización.

Así pues, para resolver el problema vamos a calcular primeramente el campo debido a un disco con densidad superficial σ_p en los puntos de su eje.



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\sigma_p dS}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

$\vec{r} = z\vec{u}_z$ $\qquad \vec{r}\,' = r'\vec{u}_r$ $\qquad dS = r' * d\varphi * dr'$ $\qquad \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right| = \left(z^2 + r'^2\right)^{1/2}$

El campo buscado solamente tiene componente z.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\sigma_p z * r' dr'}{\left(z^2 + r'^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{z}{\left(z^2 + r'^2\right)^{1/2}}\right]_0^R = \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{|z|}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right)$$

Nota : La integral se ha resuelto mediante el cambio de variable siguiente: $z^2 + r'^2 = t^2$

El resultado es :

$\vec{E} = E_z \vec{u}_z$ (por encima del disco)

$\vec{E} = -E_z \vec{u}_z$ (por debajo del disco)

Ahora vamos a calcular el campo $\vec{E}$ en un punto del eje fuera del electrete. Para ello nos damos cuenta de que el campo buscado es igual a la suma de los campos creados por dos discos con densidades superficiales σ_p y $-\sigma_p$ situados en z = t y z = 0, respectivamente.

$$\vec{E}_o = \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{z-t}{\left((z-t)^2+R^2\right)^{1/2}}\right)-\left(1-\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right)\right]\vec{u}_z$$

Si operamos en la expresión anterior, cambiando σ_p por P, obtenemos:

$$\vec{E}_o = \frac{-\mathrm{P}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z-t}{\left((z-t)^2+R^2\right)^{1/2}}-\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right]\vec{u}_z$$

El desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ se calcula, de forma general, con la fórmula: $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$.

Para calcular $\vec{D}_o$ tenemos que tener en cuenta que en la zona en que hay vacío el vector $\vec{P}$ se anula. El resultado es por tanto:

$$\vec{D}_o = \varepsilon_0\vec{E}_o$$

Ahora vamos a calcular el campo $\vec{E}$ en un punto del eje en el interior del electrete. Operando de manera análoga al caso anterior, teniendo en cuenta que ahora los campos son aditivos, se obtiene:

$$\vec{E}_i = \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0}\left[-\left(1-\frac{(t-z)}{\left((t-z)^2+R^2\right)^{1/2}}\right)-\left(1-\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right)\right]\vec{u}_z =$$

$$= \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0}\left[-2+\frac{t-z}{\left((t-z)^2+R^2\right)^{1/2}}+\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right]\vec{u}_z = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left[2-\frac{t-z}{\left((t-z)^2+R^2\right)^{1/2}}-\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right]\vec{u}_z$$

Como el problema nos dice que el electrete es delgado podemos hacer la siguiente aproximación:

$R >> t$ → R >> z y R >>(t-z) → R^2 >> z^2 y R^2 >> $(t-z)^2$

Teniendo esto en cuenta, obtenemos lo siguiente :

$$\vec{E}_i = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left[2-\frac{t-z}{R}-\frac{z}{R}\right]\vec{u}_z = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left[2-\frac{1}{R}(t-z+z)\right]\vec{u}_z = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left[2-\frac{t}{R}\right]\vec{u}_z = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left(\frac{2R-t}{R}\right)\vec{u}_z$$

El desplazamiento eléctrico $\vec{D}_i$ se calcula como: $\vec{D}_i = \varepsilon_0\vec{E}_i+\vec{P}$

$$\vec{D}_i = \varepsilon_0\frac{\left(-\vec{P}\right)}{2\varepsilon_0}\left(\frac{2R-t}{R}\right)+\vec{P} = \vec{P}\left(\frac{-2R+t+2R}{2R}\right) = \frac{\vec{P}t}{2R}$$

⦿ **Ejercicio 24**

Condiciones de contorno:

* $E_{in,t} = E_{out,t}$
* $D_{in,n} - D_{out,n} = \rho_s = 0 \Rightarrow D_{in,n} = D_{out,n}$

El problema no nos indica que existe carga libre en la superficie del dieléctrico, por lo tanto, $\rho_s = 0$. También nos dice que el dieléctrico es homogéneo, así que, asumiendo que también es isótropo, podemos afirmar que el medio es simple, por lo que:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

Para poder demostrar las condiciones de contorno, tenemos que calcular el campo tanto en el exterior y en el interior de la esfera. En coordenadas esféricas se tiene que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial R}\vec{a}_r - \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta$$

ya que no existe dependencia de los potenciales con ϕ. Calculemos entonces el campo en el interior:

$$V_{in} = \frac{-3E_0 R\cos\theta}{\varepsilon_r + 2} \qquad \frac{\partial V_{in}}{\partial R} = -\frac{3E_0\cos\theta}{\varepsilon_r + 2}$$

$$\frac{\partial V_{in}}{\partial \theta} = -\frac{3RE_0(-sen\theta)}{\varepsilon_r + 2}$$

$$\vec{E}_{in} = \frac{3E_0\cos\theta}{(\varepsilon_r + 2)}\vec{a}_R + \frac{3E_0(-sen\theta)}{(\varepsilon_r + 2)}\vec{a}_\theta$$

Ahora calculemos el campo en el exterior de la esfera:

$$v_{out} = -E_0\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{R^2}\cdot\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \qquad \frac{\partial V_{out}}{\partial R} = -E_0\cos\theta - \frac{2E_0 a^3}{R^3}\cdot\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial V_{out}}{\partial \theta} = E_0 R\cdot sen\theta + \frac{E_0 a^3}{R^2}\cdot\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\cdot(-sen\theta)$$

$$\vec{E}_{out} = E_o\cos\theta\left[1 + \frac{2a^3}{R^3}\cdot\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right]\vec{a}_R - E_0 sen\theta\left[1 - \frac{a^3}{R^3}\cdot\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right]\vec{a}_\theta$$

Pero como estamos en la superficie ($R = a$), tenemos que el campo eléctrico en el exterior de ella es:

$$\vec{E}_{out}(R=a)=\frac{3E_0\varepsilon_r\cos\theta}{\varepsilon_r+2}\vec{a}_R+\frac{3E_0(-sen\theta)}{\varepsilon_R+2}\vec{a}_\theta$$

Ahora que hemos calculado el campo, comprobamos que se cumplen las condiciones de contorno:

* $E_{in,t}=E_{out,t}$

$$E_{in,t}=\frac{3E_0(-sen\theta)}{\varepsilon_R+2}$$

$$E_{out,t}=\frac{3E_0(-sen\theta)}{\varepsilon_R+2}$$

por lo que se cumple que las componentes tangenciales del campo son iguales.

* $D_{in,n}=D_{out,n}$

$$D_{in,n}=\varepsilon_0\varepsilon_r E_{1n}=\frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r E_0\cos\theta}{\varepsilon_r+2}$$

$$D_{out,n}=\varepsilon_0 E_{2n}=\frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r E_0\cos\theta}{\varepsilon_r+2}$$

Con esto se demuestra que las condiciones de contorno en la superficie de la esfera se cumplen.

<u>Aclaraciones:</u>

- La componente tangencial del campo depende, en esféricas, de los parámetros θ y ϕ. Al ser la componente ϕ nula, la única componente que actúa es θ.
- La componente normal del campo es la que depende del parámetro R.
- En la expresión de la componente normal exterior, el parámetro ε_r, puesto que en el vacío su valor es 1, se corresponde al dieléctrico.

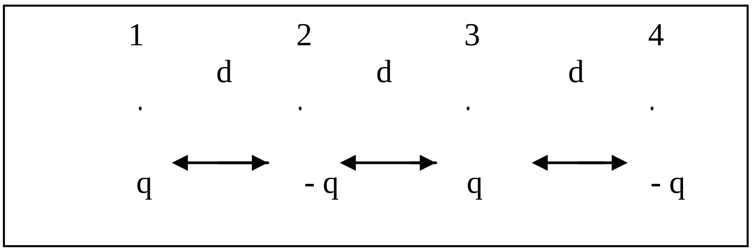
⦿ **Ejercicio 25**

En general, la expresión de la energía de un sistema discreto de cargas es la siguiente:

$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$, donde V_i = potencial en la posición i debido a las demás cargas

Para saber cual de las dos situaciones es más estable hallamos la energía en las dos situaciones, y aquella donde la energía es menor es la más estable.

Situación original:



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{d} + \frac{q}{2d} - \frac{q}{3d}\right] = \frac{5q}{24\pi\varepsilon_0 d}$$

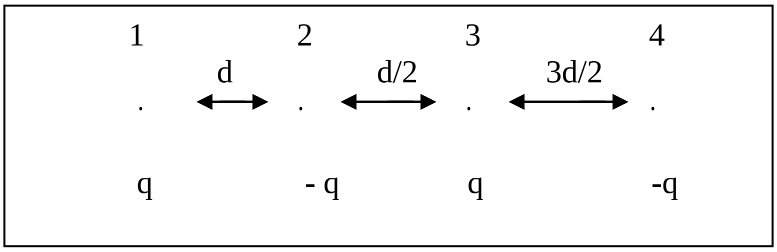
$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{d} + \frac{q}{d} - \frac{q}{2d}\right] = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2d} - \frac{q}{d} - \frac{q}{d}\right] = \frac{-3q}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{3d} - \frac{q}{2d} + \frac{q}{d}\right] = \frac{5q}{24\pi\varepsilon_0 d}$$

$$W_{Original} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i = -7q\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 d}$$

Situación tras el desplazamiento:



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{d} + \frac{q}{3d/2} - \frac{q}{3d}\right] = \frac{-q}{6\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{d} + \frac{q}{d/2} - \frac{q}{2d}\right] = \frac{5q}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

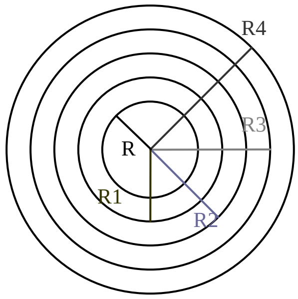
$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{3d/2} - \frac{q}{d/2} - \frac{q}{3d/2}\right] = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{3d} - \frac{q}{2d} + \frac{q}{3d/2}\right] = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

$$W_{desplazado} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i = -17q\frac{q}{24\pi\varepsilon_0 d}$$

$W_{desplazado}$ es menor que $W_{original}$, por tanto, el sistema es más estable tras el desplazamiento.

⦿ **Ejercicio 26**



Solución:

En el problema 4 obtuvimos los potenciales en las distintas regiones del sistema, que son:

$$* \text{Para } r > R_4 : V = 0$$
$$* \text{Para } R_4 > r > R_3 : V = 0$$
$$* \text{Para } R_3 > r > R_2 : V = \frac{Q+Q'}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_3}{r}\right)$$
$$* \text{Para } R_2 > r > R_1 : V = \frac{Q+Q'}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$
$$* \text{Para } R_1 > r > R : V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_1 R_3}{R_2 r}\right) + \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$
$$* \text{Para } R > r : V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_1 R_3}{R_2 R}\right) + \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

El sistema es análogo a dos condensadores conectados en serie. La energía total será igual a la suma de la energía de cada uno de estos condensadores:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} Q\cdot\left[V(R) - V(R_1)\right] = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_1}{R}\right)$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2}(Q+Q')\cdot\left[V(R_2) - V(R_3)\right] = \frac{(Q+Q')^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

Por tanto, la energía total es:

$$\omega_T = \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[Q^2\cdot L_n\left(\frac{R_1}{R}\right) + (Q+Q')^2\cdot l_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)\right]$$

⊙ **Ejercicio 27**

Para Realizar el cálculo de la Energía electrostática almacenada en el sistema del problema 7, necesitaremos los siguientes valores calculados en el mismo:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_3}\right) \qquad r < R_1$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_3}\right) \qquad R_1 \le r < R_2$$

$$V_3 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \qquad R_2 \le r \le R_3$$

$$V_4 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r > R_3$$

Para calcular la energía almacenada en el sistema, nos basamos en que este es análogo a 2 condensadores en serie: uno entre los dos conductores, y otro entre el conductor externo y el "infinito". Por lo tanto, aplicamos en cada uno de ellos la fórmula de la energía para un condensador:

$$\omega = \frac{1}{2} Q\Delta V$$

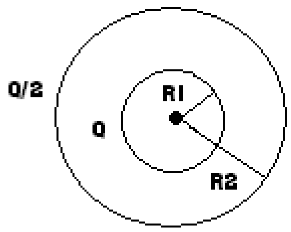
$$\omega_1 = \frac{1}{2} Q\left[V(R_1) - V(R_2)\right] = \frac{1}{2} Q\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_3}\right) - \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} Q\left[V(R_1) - V(R_2)\right] = \frac{1}{2} 3Q\left[\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\right] = \frac{9Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

Sumando las energías resultantes obtenemos la energía Total:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{9}{R_3}\right)$$

⦿ **Ejercicio 28**



En primer lugar debemos de darnos cuenta que para calcular el trabajo total tendremos que calcular el trabajo para traer la carga Q desde el infinito y luego calcular el trabajo para traer la carga Q + Q/2 desde el infinito. Una vez obtenidas estas dos cantidades haremos la resta de WQ+Q/2 - WQ.
Para calcular dichos trabajos usaremos la fórmula:

$$W = \tfrac{1}{2}\int_{\infty} \vec{D}\vec{E}dv$$

Como podemos observar en la fórmula del trabajo necesitamos saber el valor del campo para poder responder al problema.

<u>Cálculo del campo:</u>
Observamos como hay tres regiones: una con R<R1, otra con R1 < R < R2 y la ultima con R > R2. Calculemos el campo en cada una de las regiones. Como el problema tiene simetría esférica aplicamos el Teorema de Gauss para el cálculo del campo.

Región con R > R2

$$\Phi = \int \vec{E}\,\vec{ds} = E\int ds = E\cdot 4\pi R^2$$

$$E\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q/2+Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{3Q}{8\pi R^2\varepsilon_o}$$

Región R1< R < R2

$$\Phi = \int \vec{E}\,\vec{ds} = E\int ds = E\cdot 4\pi R^2$$

$$E\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2\varepsilon_o}$$

Región de R<R1

En esta región no hay carga por lo que el campo va a ser cero. E = 0

Una vez calculados los campos en las distintas regiones procedemos a calcular el trabajo.

<u>Cálculos de los trabajos:</u>

$$W_Q = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{D}\,\vec{E}\,dv$$

Como estamos en el vacío sabemos que :

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$$

Entonces:

$$W_Q = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{D}\,\vec{E}\,dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\infty} E^2 dv$$

- *Energía de Q*

El diferencial de volumen es: $dv = 4\pi R^2 dR$ y el campo será el de la región R>R1.

$$W_Q = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{D}\,\vec{E}\,dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\infty} E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R1}^{\infty}\left(\frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0}\right)^2 \cdot 4\pi R^2 \cdot dR = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

- *Energía de Q y Q/2*
-

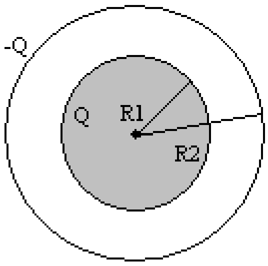
$$W_{Q+Q/2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R1}^{R2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R2}^{\infty}\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\,dv = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{9R_1^{\ 2}}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Una vez obtenidos las dos energías las restamos y obtenemos el trabajo realizado para acumular sobre la superficie esférica de radio R2 una carga de Q/2.

$$\Delta W = W_{Q+Q/2} - W_Q = \frac{5Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R_2}$$

⦿ **Ejercicio 29**

a) Campo en función de la distancia al centro:



➔ En $0 \leq r \leq R_1$

Como la densidad de carga, ρ, es uniforme en la esfera, de volumen *V*:

$$Q = \rho \cdot V \Rightarrow \rho = \frac{Q}{4/3 \cdot \pi \cdot R_1^3}$$

Aplicando el teorema Gauss:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho \cdot V}{\varepsilon_0}$$, donde, resolviendo la integral:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4/3\pi\varepsilon_0 R_1^3} \cdot 4/3\pi r^3$$, quedando $E_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^{\,3}} \cdot r\vec{U}_r$

➔ En $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{U}_r$$

➔ En $r \geq R_2$

$E_3 = 0$, ya que la carga total encerrada en las superficies esféricas para las que $r \geq R_2$ es cero, con lo cual si no hay carga tampoco habrá campo.

b) Energía electrostática del sistema:

Como solo existe campo en la región 1 y en la región 2, la correspondiente energía electrostática, cuya expresión depende directamente del $\vec{E}$, vendrá definida por los límites de integración correspondiente a las separaciones entre las regiones 1 y 2. Por otra parte, la expresión de la energía electrostática creada por un sistema viene dada por:

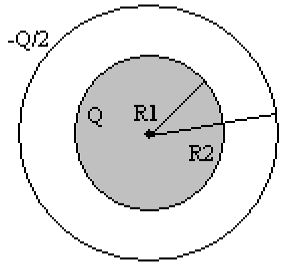
$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_v E^2 \cdot dv$$

En donde calculando la energía de nuestro sistema obtenemos:

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\int_0^{R_1} E_1^{\,2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2^{\,2} \cdot 4\pi r^2 dr \right] = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\int_0^{R_1} \frac{Q^2 \cdot r^2 \cdot 4\pi r^2}{\left(4\pi\varepsilon_0 R_1^{\,3}\right)^2} dr + \int_{R_1}^{5R_1} \frac{Q^2 \cdot 4\pi r^2}{\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)^2} dr \right] =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{2Q^2}{8\pi\varepsilon_0^{\,2}} \left(\int_0^{R_1} \frac{r^4}{R_1^{\,6}} dr + \int_{R_1}^{5R_1} \frac{r^2}{r^4} dr \right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\left(\frac{r^5}{5 \cdot R_1^{\,6}} \right)_0^{R_1} + \left(-\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{5R_1} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

c) Si quitamos la mitad de la carga –Q de la capa esférica, ¿Cuál será la variación de la energía electrostática del sistema?



Al quitar la carga –Q/2, la carga resultante será -Q/2, cosa que únicamente afecta a E_3, que deja de ser nulo. Ahora:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\varepsilon_0} \Rightarrow \; E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_v}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

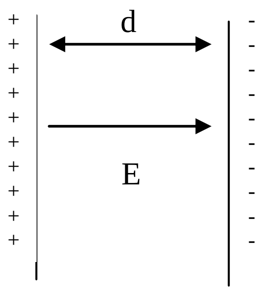
$$\Rightarrow \mathrm{E}_3 = \frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \;\; \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{U}_r$$

Por tanto, como consecuencia de que el campo eléctrico en la región 3 no es 0, la variación de energía electrostática vendrá determinada por:

$$\Delta W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_{5R_1}^{\infty}\frac{Q^2}{\left(8\pi\varepsilon_0 r^2\right)^2}\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\right]_{5R_1}^{\infty} = \frac{Q^2}{160\pi\varepsilon_0 R}$$

⦿ **Ejercicio 30**

Tenemos un condensador plano de superficie S y espesor d (separación de las placas). El condensador se carga con una diferencia de potencial de V_0. Nos piden hallar la densidad de energía electroestática. Para hallarla es necesario conocer el campo entre las placas:



Por ser el campo uniforme, perpendicular a las placas:

$$E = \frac{V_o}{d}$$

Hallamos primero la densidad volumétrica de carga, $\frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$.

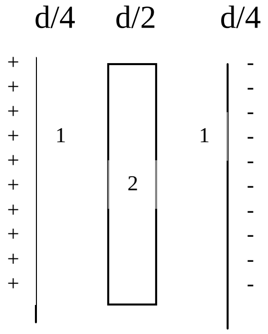
Como $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$:

$$\frac{dW_{eA}}{dv} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{V_0^2}{d^2}$$

Multiplicando por el volumen total: $Volumen = S \cdot d$,

$$W_{e_A} = \frac{\varepsilon_0}{2} S \frac{V_0^2}{d}$$

En la segunda situación introducimos una lamina metálica de espesor d/2 entre las dos placas del condensador, tras haber desconectado la fuente de tensión. Debemos hallar el campo en las regiones 1 y 2.



Como las cargas en las placas del condensador no han variado, el campo debido a las placas, entre éstas y el metal (1), permanece constante: $E_1 = \frac{V_0}{d}$. Obviamente, en el interior del metal el campo es nulo: $E_2 = 0$. Por tanto, la densidad volumétrica de energía en (1), será:

$$\frac{dW_{eB}}{dv} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{V_0^2}{d^2}$$

y en (2) será cero. El volumen ahora será: $Volumen = \left(\frac{d}{4} + \frac{d}{4}\right)S$. Y la energía:

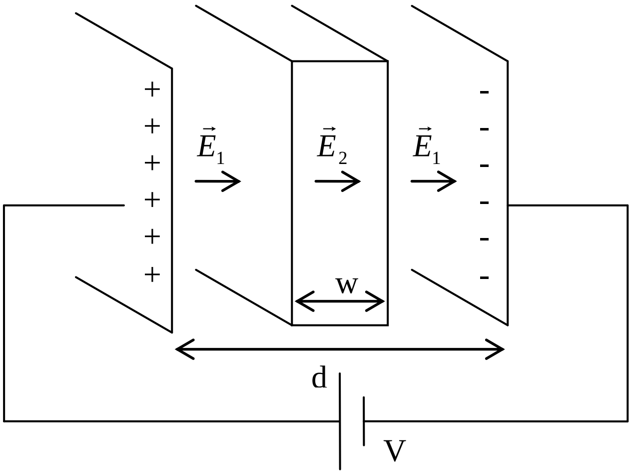
$$W_{e_B} = \frac{\varepsilon_0}{4} S \frac{V_0^2}{d}$$

Por último, la diferencia de energía entre ambas situaciones es :

$$\Delta W = \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\varepsilon_0}{4}\frac{V_0^2}{d} S$$

La pérdida de energía se traduce en el trabajo realizado por las placas al introducir la lámina (o como el trabajo que sería necesario para sacar de nuevo la lámina metálica).

⦿ **Ejercicio 31**



a) Capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$Q = \int \rho_S dS = \rho_S \cdot A$$

Al tratarse de un condensador sólo existirá campo entre las placas del mismo. Por tanto:

$$V = \int \vec{E}d\vec{l} = E_1 \cdot (d - W) + E_2 \cdot W$$

Por Gauss (empelando como superficie gaussiana un cilindro en una de las placas del condensador):

$$\oint \vec{E}_1 d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}; E_1 \cdot A = \frac{\rho_S \cdot A}{\varepsilon_0}; \rho_S = E_1 \cdot \varepsilon_0 = D_1$$

Por otro lado, sabemos que una condición de contorno es: $\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \rho_S$. Como en la superficie del dieléctrico no hay carga libre: $\rho_S = 0$, y teniendo en cuenta que el vector desplazamiento eléctrico en este problema sólo se mueve en la dirección perpendicular a las placas (componente normal) tenemos que:

$$D_1 = D_2; \varepsilon_0 \cdot D_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot D_2; E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon_r}$$

Si sustituimos en el potencial:

$$V = E_1 \left(d - W + \frac{W}{\varepsilon_r} \right) = \frac{E_1}{\varepsilon_r} \left[\varepsilon_r \cdot \left(d - W \right) + W \right]$$

Con lo que capacidad será:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_S \cdot A}{E_1 \cdot \left(d - W \right) + E_2 \cdot W} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{\varepsilon_r \cdot \left(d - W \right) + W} \approx 322\, pF$$

b) Carga del condensador: sabemos que,

$$Q = \rho_S \cdot A$$

$$V = \frac{E_1}{\varepsilon_r}\left[\varepsilon_r \cdot (d-W)+W\right] \Rightarrow E_1 = \frac{V\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon_r\cdot(d-W)+W}$$

$$\rho_S = E_1 \cdot \varepsilon_0 = 1.61\cdot 10^{-5}$$

$$Q = 0.32\mu C$$

c) Energía almacenada:

Partiendo de la fórmula general de la energía, podemos deducir una expresión para la energía de un condensador.

$$We = \frac{1}{2}\cdot\int_{\infty} D\cdot E\cdot dv = \frac{1}{2}\cdot\int_{cond.} D\cdot E\cdot dv$$

Sabiendo que:

$$dv = A\cdot dl$$

$$D = \rho_S$$

Sustituyendo se encuentre que:

$$We = \frac{1}{2}\cdot A\cdot\int D\cdot E\cdot dl = \frac{1}{2}\cdot A\cdot D\cdot\int E\cdot dl = \frac{1}{2}\cdot A\cdot D\cdot V$$

$$We = \frac{1}{2}\cdot A\cdot\rho_S\cdot V = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{V}\cdot V^2 = \frac{1}{2}\cdot C\cdot V^2 = 1.605\cdot 10^{-4}\,J$$

d) Calculamos los vectores campo, desplazamiento eléctrico y vector de polarización:

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \varepsilon_0\cdot\vec{E}_1 = 1.61\cdot 10^{-5}\vec{a}_x \, C/m^2$$

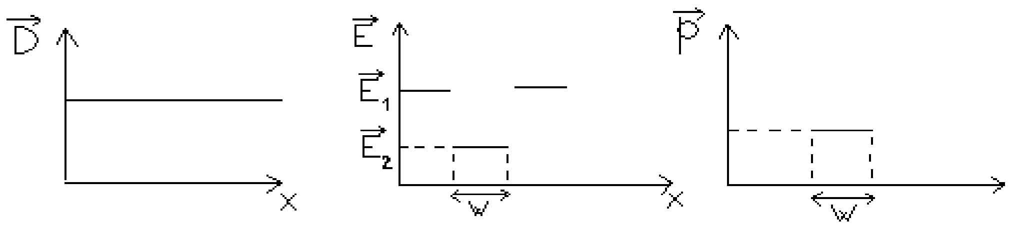
$$\vec{E}_1 = \frac{V\cdot\varepsilon_r}{\varepsilon_r\cdot(d-W)+W} = 1818181.82\vec{a}_x \, V/m$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_1}{\varepsilon_r} = 454545.45\vec{a}_x \, V/m$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0\cdot\vec{E}_1 + \vec{P}_1;\ \vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0\cdot\vec{E}_1 = 0\, C/m^2$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_0\cdot\vec{E}_2 + \vec{P}_2;\ \vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0\cdot\vec{E}_2 = 1.2\cdot 10^{-5}\vec{a}_x \, C/m^2$$

La representación de estos vectores será:



⊙

Ejercicio 32

a) Hallar ρ_0 en función de Q y a.

R<a

En primer lugar aplicamos el teorema de Gauss generalizado:

$\int Dds = \int D \cdot S = \varepsilon E \int ds = \varepsilon E 4\pi R^2 \leftarrow$ *"ecuación número 1"*

$Q_v = \int \rho_v dv = \int \rho_o \frac{a}{R} 4\pi R^2 dR = \rho_o 2a\pi R^2 \leftarrow$ *"ecuación número2"*

Igualando la ecuación 1 con la ecuación 2, obtenemos:

$$E_1 = \frac{\rho_o a}{\varepsilon 2} a_r$$

R= a

Q = Q_v (R=a)

De la ecuación 2 obtenemos:

$Q_v = \rho_o 2\pi a^3$ .Por tanto:

$$\rho_o = \frac{Q}{2\pi a^3}$$

Ahora nos falta calcular lo mismo pero para la región externa.

R > a

$$\left.\begin{array}{l} \int Dds = Q_v = Q \\ \int \varepsilon Eds = \varepsilon_o E 4\pi R^2 \end{array}\right\} \quad E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_o 4\pi R^2}$$

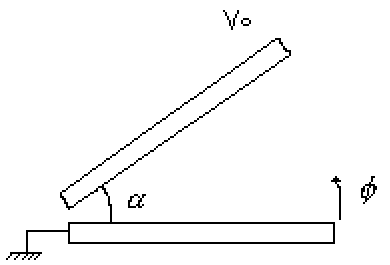
b) Hallar la energía electrostática del sistema:

$$W = \frac{1}{2}\int DEdv = \frac{1}{2}\left[\int_0^a \varepsilon E_1 \cdot E_1 dv + \int_a^\infty \varepsilon_o E_2 \cdot E_2 dv\right] = \frac{1}{2}\left[\varepsilon \int_0^a E_1^2 4\pi R^2 dR + \varepsilon_0 \int_a^\infty E_2^2 4\pi R^2 dR\right]$$

= sustituyendo valores y calculando las integrales $= \frac{Q^2}{24\pi a} \cdot \frac{\varepsilon_o + 2\varepsilon}{\varepsilon \cdot \varepsilon_o}$

⊙ Ejercicio 33

Dividiremos el estudio de este problema en dos partes bien diferenciadas. Nos centraremos en primer lugar en calcular la distribución de potencial en la zona $0 < \phi < \alpha$, y luego en la región $\alpha < \phi < 2\pi$.



A continuación vamos a realizar un par de consideraciones para simplificar dicho problema. Debido a que los planos conductores son infinitos despreciamos los efectos de borde y el grosor de dichos planos.

Debemos plantear unas ecuaciones que describan el comportamiento del potencial en la figura anterior, y posteriormente calculamos su distribución en ambas regiones.

Partiremos de uno de los postulados fundamentales de la electrostática.

$$\vec{\nabla} D = \vec{\nabla}(\varepsilon \vec{\mathrm{E}}) = \rho$$

En medios simples, ε es cte. ➔ $\vec{\nabla}(\varepsilon \vec{\mathrm{E}}) = \varepsilon \vec{\nabla} \vec{\mathrm{E}}$. Como el campo eléctrico es menos el gradiente del potencial ($\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla} V$), la expresión anterior la podemos dejar de la forma siguiente:

$$\varepsilon \vec{\nabla} \vec{\mathrm{E}} = -\varepsilon \vec{\nabla}(\vec{\nabla} V) = -\varepsilon \vec{\nabla}^2 V = \rho$$

Teniendo en cuenta que no existen cargas libres en volumen, con lo cual $\rho = 0$, llegamos a la ecuación de Laplace:

$$\vec{\nabla}^2 V = 0 \quad \vec{\nabla}^2 V = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \mathrm{V}) = 0$$

Usaremos coordenadas cilíndricas para simplificar el cálculo del potencial

Por todos es conocido que en cilíndricas: $\vec{\nabla} V = \vec{a}_r \dfrac{\partial V}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \vec{a}_\phi \dfrac{\partial V}{\partial \phi} + \vec{a}_z \dfrac{\partial V}{\partial z}$

Pero como en nuestro caso el potencial no depende de r ni de z:

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{a} \phi$$

Por tanto:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} V) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{a} \phi\right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot 0) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(0) \right]$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}V) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$$

Para obtener el potencial en el circuito formado por los dos planos conductores, bastaría con resolver la ecuación resultante del procedimiento anterior.

1. $0 < \phi < \alpha$:

$$\frac{\partial V}{\partial\phi} = cte \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V} = \mathrm{A}\phi + \mathrm{B}$$

Incluyendo las condiciones de contorno: V(0) = 0 y $V(\alpha)=V_0$
De la primera obtenemos que B = 0.
De la segunda $V_0 = A\alpha$ ➔ $A = V_0/\alpha$
La distribución de potencial para esta zona de estudio será:

$$V = \frac{V_0}{\alpha}\phi$$

2. $\alpha < \phi < 2\pi$:

$$\frac{\partial V}{\partial\phi} = cte \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V} = \mathrm{C}\phi + \mathrm{D}$$

Incluyendo las condiciones de contorno: $V(\alpha) = V_0$ y $V(2\pi) = 0$

De la primera condición $V_0 = C\,\alpha + D$ (1)

De la segunda se obtiene0 = C 2π + D => D = - 2π C (2)

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos la expresión para la 2ª zona.

$C\alpha - 2\pi C = V_0$ => $C(\alpha - 2\pi) = V_0$ => $C = -\dfrac{V_0}{(2\pi-\alpha)}$

Por tanto:

$$D = \frac{2\pi}{(2\pi-\alpha)}V_0$$

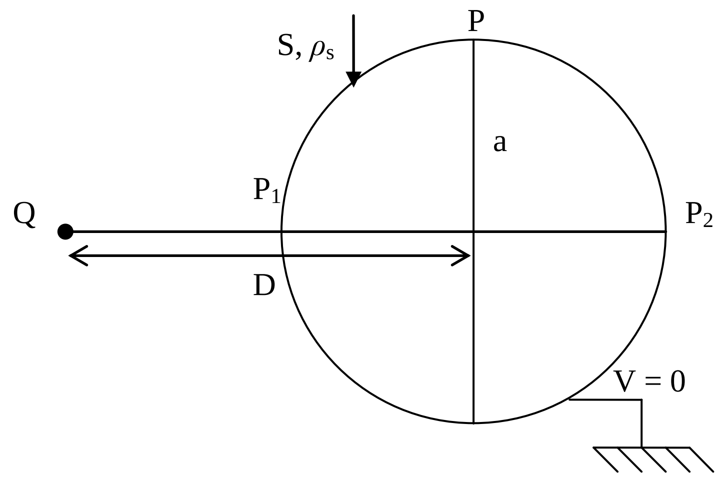
La distribución del potencial será:

$$V = \frac{-V_0}{(2\pi-\alpha)}\phi + \frac{2\pi}{(2\pi-\alpha)}V_0$$

$$V = \frac{2\pi-\phi}{2\pi-\alpha}V_0$$

⊚ Ejercicio 34

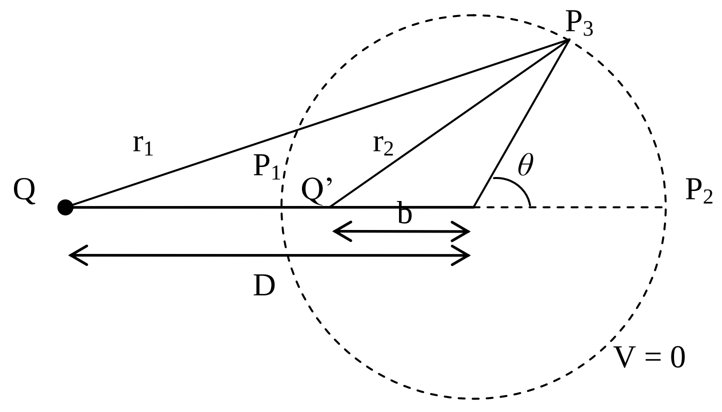
Q_s = Carga inducida por Q en la superficie del conductor.



Para resolver este problema por el método de las imágenes, se debe sustituir el conductor por una distribución de carga para hacerlo más sencillo, pero que siga manteniendo las condiciones de contorno que había con el conductor. En este caso, en la superficie el potencial debe ser 0 porque está conectado a tierra. Utilizaremos una carga puntual imagen que situaremos dentro de la esfera conductora. A continuación se calculara el campo $\vec{E}_n$ (campo eléctrico normal a la superficie) ya que sabemos que:

$$Q_s = \int \rho_s ds \; ; \quad \rho_s = \varepsilon_0 \vec{E}_n$$

Q'= carga puntual imagen



Una vez sustituimos el conductor por la carga imagen, comprobamos que las condiciones de contorno no han variado. En este caso debemos comprobar que el potencial en cualquier punto donde se encontraba la superficie del conductor es 0.

Primero lo comprobamos para P_1 y P_2:

$$V(P_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{D-a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q'}{a-b} = 0$$
$$V(P_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{D+a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q'}{a+b} = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones hallamos: $b = \frac{a^2}{D}$ $\quad Q' = -\frac{aQ}{D}$

Para estos dos puntos se cumplen las condiciones de contorno, pero falta comprobarlo para cualquier punto de la superficie de la esfera. Sea P3 un punto cualquiera de la superficie de la esfera conductora. Por trigonometría:

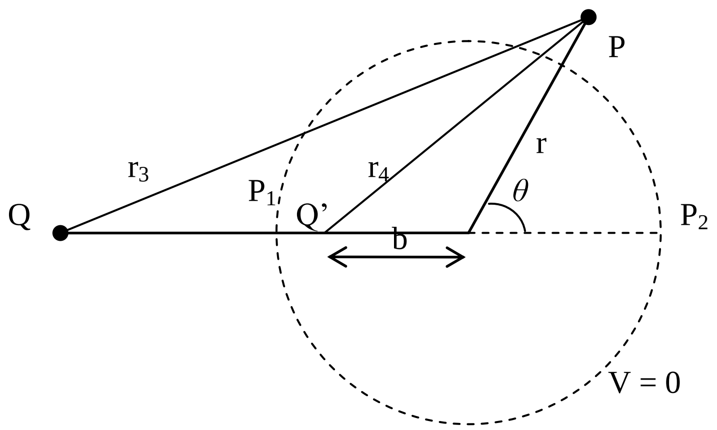
$$V(P_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right)$$

$$r_1 = \sqrt{D^2 + a^2 - 2aD\cos(180-\theta)} \qquad r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180-\theta)}$$

$$\cos(180-\theta) = \cos\theta$$

$$V(P_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{\sqrt{D^2 + a^2 - 2aD\cos\theta}} + \frac{-aQ/D}{\sqrt{a^2 + \frac{a^4}{D^2} - 2\frac{a^3}{D}\cos\theta}} \right) \Rightarrow V(P_3) = 0$$

Esto implica que Q’ esta bien situada. Una vez comprobado que se cumplen las condiciones de contorno, debemos hallar V en un punto cualquiera.



$$V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q}{r_3}+\frac{Q'}{r_4}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q}{r_3}-\frac{aQ/D}{r_4}\right)$$

$$r_3=\sqrt{r^3+D^2+2rD\cos\theta} \qquad r_4=\sqrt{r^2+\frac{a^4}{D^2}-2r\frac{a^2}{D}\cos\theta}$$

Sabemos que el campo en la superficie será: $\vec{E}_n=\vec{E}_r(r=a)$

En general: $\vec{E}_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q(r+D\cdot\cos\theta)}{{r_3}^3}+\frac{\frac{aQ}{D}\cdot\left(r+\frac{a^2}{D}\cos\theta\right)}{{r_4}^3}\right)$

Con lo que:

$$\vec{E}_n=\vec{E}_r(r=a)=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{D^2-a}{(D^2+a^2+2aD\cos\theta)^{3/2}}$$

$$Q_s=\int s\rho_s ds\,; \qquad ds=a^2 sen\theta d\theta d\phi\,; \qquad S=\theta]_0^{\pi}\,\phi]_0^{2\pi}$$

La carga que aparece en la superficie coincide con la carga imagen Q’.