ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1 Introducción

En un modelo dinámico el tiempo puede intervenir en forma continua o discreta, utilizándose diferentes elementos matemáticos según sea el caso. En el Capítulo 1 estudiaremos las ecuaciones diferenciales donde el tiempo interviene en forma continua y en el Capítulo 2 las ecuaciones en diferencias donde el tiempo se mide en forma discreta.

Muchos problemas de las ciencias aplicadas se formulan, matemáticamente, por medio de la determinación de una función incógnita que satisface una ecuación en la que aparece ella y sus derivadas. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales.

A diferencia de las ecuaciones algebraicas, donde la incógnita que se determina representa algún tipo de número, en las ecuaciones diferenciales las incógnitas del problema son funciones reales.

Se trata de encontrar una función $y(x)$ que verifique cierta relación funcional de la forma

$$F(x, y, y', y''..., y^{(n)}) = 0.$$

Por definición, el *orden* de la ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en su expresión. Por ejemplo, la ecuación diferencial $y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$ es de tercer orden.

Una solución de la ecuación en el intervalo $\alpha < x < \beta$, es una función $\phi(x)$ que satisface la relación funcional de partida, es decir verifica

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0.$$

Dada una ecuación diferencial, suele ser inmediato comprobar si una determinada función es solución suya, por simple sustitución. Por ejemplo, es fácil ver que las siguientes funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

1. La ecuación $y = 2e^{-x}$ para $-\infty < x < \infty$, es solución de $y' = -y$.
2. $y = \cos x, y = sen x,$ para $-\infty < x < \infty$, es solución de $y'' + y = 0$.
3. La ecuación $y = x^2 \ln x$ para $x > 0$, es solución de $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.

Comenzaremos, por simplicidad, con el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.2. Problemas básicos en ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial de primer orden se dice que está escrita en *forma normal* cuando viene expresada en la siguiente forma funcional

$$y' = f(x,y) \text{ o } \frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

En el caso en que se considere el movimiento de una variable y respecto al tiempo utilizaremos la notación $x = t$. En tal caso la derivada suele expresarse como $\dot{y}$, y la forma normal es

$$\dot{y} = f(t,y).$$

Una relación de este tipo suele denominarse también *sistema dinámico continuo*.

Existen tres problemas básicos a considerar en relación con una ecuación diferencial, el de la existencia de la solución, el de la unicidad de la solución y el del cálculo efectivo de las soluciones. A continuación enunciaremos cada uno de ellos por separado.

Problema de la existencia de solución

Dada una ecuación diferencial ¿cuándo podemos afirmar, de antemano, si tiene solución? Este es un problema teórico complicado, en el que los matemáticos invirtieron mucho esfuerzo hasta encontrar una respuesta afirmativa. Puede demostrarse, bajo condiciones bastante generales de regularidad para la función $f(x,y)$ tales como la continuidad de las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$, que la ecuación $y' = f(x,y)$ posee solución.

Problema de la unicidad. Soluciones generales y particulares

A continuación resulta lógico hacerse las siguientes preguntas, ¿cuántas soluciones admite una ecuación diferencial?, ¿qué tipo de condiciones adicionales deben especificarse para que la solución sea única?

En general, una ecuación diferencial posee infinitas soluciones. Por ejemplo, es inmediato comprobar que $y' = y$ tiene infinitas soluciones de la forma $y = Ce^x$, donde $C \in R$ es una constante arbitraria. Análogamente, la ecuación $y'' + y = 0$ tiene soluciones tanto de la forma $y = k_1 \operatorname{sen} x$ como de la forma $y = k_2 \cos x$, para cualquier $k_1, k_2 \in R$.

Como veremos, la unicidad de las soluciones se podrá garantizar imponiendo tantas condiciones adicionales como indique el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo, si nos planteamos resolver la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ con la condición inicial de que su solución tome en x_0 el valor y_0, esto es, $y(x_0) = y_0$, puede demostrarse matemáticamente que la solución de este problema será única.

Por definición, un problema de *valores iniciales*, de primer orden, es una ecuación diferencial junto con una condición inicial para la función solución, de la forma

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Un importante resultado matemático conocido como teorema de existencia y unicidad afirma, bajo el supuesto de que las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ sean continuas en un entorno de x_0, que el problema de valores iniciales tiene solución única.

Ejemplo 1.1

La ecuación diferencial $y' = -y$ tiene infinitas soluciones del tipo $y = Ce^{-x}$, siendo $C \in R$ una constante arbitraria. Podemos hallar aquella solución que pase por el punto $(0,1)$. Como $Ce^0 = 1$, entonces $C = 1$ y por tanto $y = e^{-x}$ es la solución pedida.

A una solución del tipo $y = Ce^{-x}$ se le conoce como *solución general* de la ecuación pues permite obtener cualquier solución particular que se desee sin más que fijar el valor de C. La determinación de una solución particular tiene un gran contenido geométrico. Si partimos de la solución general $y = Ce^{-x}$ de la ecuación diferencial, al dar valores a C obtenemos una familia uniparamétrica de curvas cada una de las cuales constituye una solución particular.

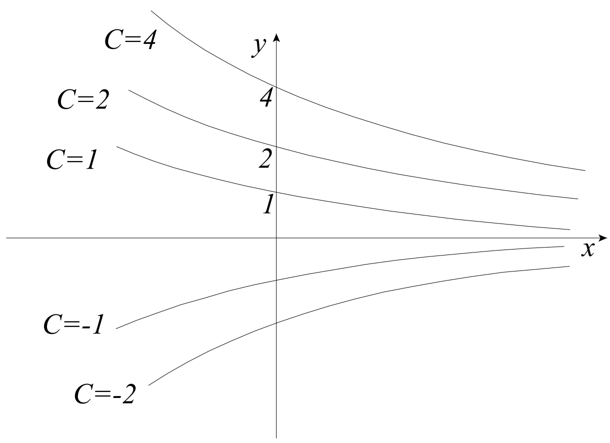


Figura 1.1

Como se observa en la Figura 1.1, especificar una solución particular equivale a elegir una determinada curva particular, lo que suele hacerse fijando unas condiciones iniciales que definen dicha curva respecto a la familia de curvas $y = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, si queremos encontrar aquella solución donde $y(0) = 3$, resultará que $y(0) = Ce^0 = 3$, de donde $C = 3$. Análogamente si queremos que $y(0) = -2$ resultará $C = -2$.

Problema del cálculo de soluciones

¿Cómo determinar, de forma efectiva, las soluciones de una ecuación diferencial? Existen tres filosofías alternativas en la solución de un problema de ecuaciones diferenciales

1. **Métodos analíticos.** Están basados en el cálculo integral, los cambios de variable, la resolución de ecuaciones algebraicas, métodos algebraicos más

generales, etc. Los métodos analíticos permiten encontrar la expresión analítica de las soluciones de una ecuación diferencial en términos de las funciones elementales de las matemáticas. Inicialmente la mayoría de los esfuerzos de los matemáticos se encaminaron a desarrollar este tipo de método, pero hoy en día se consideran que estos métodos tiene poder limitado.

2. **Métodos numéricos.** Permiten obtener las soluciones de forma aproximada. El ordenador es una herramienta esencial en este terreno.
3. **Métodos cualitativos.** Describen cualitativamente el comportamiento de las soluciones sin necesidad de calcularlas.

Los métodos analíticos como cambios de variable o las cuadraturas, no son necesariamente los más adecuados cuando el problema es complicado. También, muchas ecuaciones, aunque tengan solución, no son expresables en términos de funciones elementales. En la práctica y con el desarrollo de la informática, las ecuaciones diferenciales son resueltas por medio de métodos numéricos entre los que destaca como pionero el *Método de Euler* que se expone en el Apéndice 1 de este capítulo.

En el transcurso de este libro se intentará, siempre que sea posible, la utilización de métodos cualitativos que no resuelven ni analítica ni numéricamente el problema pero permiten anticipar un esquema cualitativo de las soluciones que suele ser muy útil.

1.3. Ecuaciones de variables separadas

El tipo de ecuación más sencillo de resolver es el de *variables separadas* que tienen la forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{o} \quad g(y)dy = f(x)dx.$$

Sus soluciones puede expresarse como

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Ejemplo 1.2

Resolver la ecuación diferencial $y' = sen2x.$

Teniendo en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx} = sen2x,$ se verifica $\int dy = \int sen2xdx$, por tanto, la solución de la ecuación diferencial dada es $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

Vamos a determinar la solución que pasa por el punto $(\frac{\pi}{4}, 1).$ Como se verifica que $1 = -\frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi}{4} + C,$ obtenemos $C = 1.$

La búsqueda de soluciones particulares nos lleva a lo que hemos llamado problema de valores iniciales. Para el caso de ecuaciones diferenciales con variables separadas, un problema de valores iniciales es de fácil solución. Sea

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}, \qquad y(x_0)=y_0,$$

entonces el problema se resuelve mediante el cálculo de integrales definidas en la forma

$$\int_{y_0}^{y} g(y)dy=\int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Ejemplo 1.3

Resolver la ecuación diferencial $y'=\operatorname{sen} 2x$ con la condición inicial $y(\frac{\pi}{4})=1.$

De la ecuación diferencial dada se sigue que $dy=\operatorname{sen} 2x\,dx,$ por tanto, integrando ambos miembros se tiene

$$\int_{1}^{y} dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \operatorname{sen} 2x\,dx,$$

y resolviendo obtenemos

$$y-1=-\frac{1}{2}\left[\cos 2x-\cos 2\frac{\pi}{4}\right],$$

luego, $y=-\frac{1}{2}\cos 2x+1$ es la solución del problema.

Aunque la ecuación diferencial de variables separadas es muy fácil de resolver analíticamente, no es la mas sencilla desde el punto de vista matemático pues, en general, da lugar a dependencias implícitas entre las variable x e y de muy difícil manejo. Como iremos viendo en el transcurso del texto, la ecuación diferencial más sencilla es la *ecuación lineal* que tiene la forma

$$y'+p(x)y=g(x).$$

Sus soluciones pueden obtenerse explícitamente y obedecen a principios de superposición. Como veremos, en la ecuación lineal puede obtenerse de forma sistemática una solución general que depende de un sólo parámetro y que engloba a todas las soluciones del problema de valores iniciales. En otras palabras, las infinitas soluciones de la ecuación lineal pueden guardarse en “muy poco espacio”.

Como paso previo estudiaremos la ecuación lineal homogénea que es aquella donde el término independiente es cero.

1.4. Ecuaciones lineales de primer orden

Ecuaciones lineales homogéneas

La ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$y'+ay=0, \qquad (a\in R).$$

Su solución general es inmediata al tratarse de una ecuación con variables separadas, procederemos de la forma

$$\frac{dy}{dx} = -ay \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a\,dx \Rightarrow \ln y = -ax + k \Rightarrow y = Ce^{-ax},$$

donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.4

Resolver el problema de valores iniciales $y' + 2y = 0, y(0) = 4.$

Como $dy = -2ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2dx \Rightarrow \ln y = -2x + k$ resulta que $y = Ce^{-2x}$ es la solución general. Determinemos ahora la solución particular para $x = 0.$

Como $4 = Ce^0 \Rightarrow C = 4$ resulta que $y = 4e^{-2x}$ es la solución particular. Observamos que la ecuación también se puede resolver introduciendo directamente los límites de integración en las cuadraturas de la siguiente forma

$$\int_4^y \frac{dy}{y} = \int_0^x -2xdx \Rightarrow \ln y - \ln 4 = -2x \Rightarrow y = 4e^{-2x}.$$

Pese a lo sencillo de las ecuaciones resueltas hasta el momento, éstas van a permitir construir modelos de gran utilidad práctica en la Economía.

Modelo de crecimiento Malthusiano

Supongamos que una población tiene $y(t)$ individuos en un instante t. Sea $r(t,x)$ la diferencia entre su tasa de nacimientos y su tasa de mortalidad. Si la población está aislada y no hay inmigración o emigración neta, entonces la tasa de cambio obedece a la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = r(t,x)x \quad \text{o} \quad \dot{x} = r(t,x)x$$

El caso más sencillo es aquel donde suponemos que $r(t,x) = a = cte,$ entonces $\frac{dx}{dt} = ax.$ Si en el instante $t = t_0$ la población tiene x_0 individuos, obtenemos el problema de valores iniciales $\frac{dx}{dt} = ax, x(t_0) = x_0$. Integrando resulta

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = a\int_{t_0}^t dt \Rightarrow \ln\frac{x}{x_0} = a(t - t_0) \Rightarrow x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)},$$

que se conoce como ley de crecimiento Malthusiano.

El modelo de Malthus conlleva diversas profecías alarmantes sobre el desarrollo de la población humana. Se estima que la población humana se incrementó en un 2% anual en el periodo 1965-1970. En Enero de 1965 la población era de 3.340 millones de personas, vamos a determinar la ley dinámica que rige el crecimiento de la población y calcular el tiempo necesario para que la población se duplique.

Nuestro modelo es $\frac{dx}{dt} = ax,$ con $a = 0.02$ (tanto por uno), $t_0 = 1965, x_0 = 3.34.10^9,$ que tiene como solución: $x(t) = 3.34 \times 10^9 e^{0.02(t-1965)}$.

El tiempo necesario para duplicar la población, contado a partir de 1965 será

$$3.34.10^9 e^{0.02(t-1965)} = 3.34.10^9 \times 2 \Rightarrow e^{0.02(t-1965)} = 2,$$

tomando logaritmos resulta $\ln 2 = 0.02(t-1965),$ por tanto

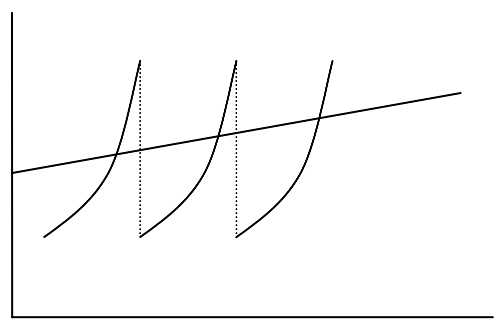
$$T = t - 1965 = \frac{\ln 2}{0.02} \cong 34.657 \text{anos.}$$

Se observa que T es una constante de este proceso que no depende de las condiciones iniciales. De mantenerse el ritmo actual de crecimiento de la población, el efecto de duplicación cada 34 años puede constituir una catástrofe de primera magnitud. Este modelo de crecimiento poblacional puede aplicarse en otras muchas situaciones.

Malthus concebía un crecimiento de los recursos (alimentos) de la forma

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \Rightarrow \quad x = c\,t + c_0$$

Gracias a las guerras, las epidemias y los desastres naturales no se produce un colapso poblacional, tal como se muestra en la siguiente figura.



Modelo de Malthus

Interés continuo

Se trata de una forma de capitalización donde los intereses producidos se suman instantáneamente al capital para producir nuevos intereses.

Si una suma S se deposita en el banco a un interés continuo de 6% tendremos que el incremento en dicha suma es proporcional a su tamaño y al intervalo de tiempo transcurrido, es decir $\Delta S = 0.06 S \Delta t$.

Cuando $\Delta t \to 0$ obtenemos la ecuación diferencial $\frac{dS}{dt} = 0.06S$. Suponiendo que $S(0) = S_0$, la solución particular vendrá dada por $S = S_0 e^{0.06t}$.

Población mundial de elefantes

Se supone que la población de elefantes decrece a una tasa de 8% anual, la tasa de crecimiento a es ahora negativa. La ecuación que rige la población x de elefantes es

$$\frac{dx}{dt} = -0.08x.$$

¿Cuánto tiempo tardaría esta población en reducirse a la tercera parte? ¿Cuánto tiempo tardaría en extinguirse?

Desintegración de elementos radiactivos

Rutherford encontró que el número de átomos de una sustancia radiactiva disminuye con el tiempo de acuerdo a la ley

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \qquad (\lambda > 0).$$

Determinar la vida media de la sustancia, esto es, el tiempo requerido para que la mitad de los átomos se desintegren.

Ecuaciones lineales no homogéneas

Las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas tienen la forma general

$$y' + ay = g(x).$$

Para resolverla haremos uso del siguiente artificio. Multiplicamos ambos miembros por e^{ax} con el fin de que en el primer miembro aparezca la derivada de un producto. Este artificio será, más adelante, generalizado con el uso de los factores integrantes. Por tanto, obtenemos

$$y'e^{ax} + aye^{ax} = g(x)e^{ax} \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{ax}) = g(x)e^{ax},$$

y su solución vendrá dada por

$$ye^{ax} = \int g(x)e^{ax}dx + C \Rightarrow y = e^{-ax}\int g(x)e^{ax}dx + Ce^{-ax}.$$

Si se trata de un problema de valores iniciales

$$y' + ay = g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

las condiciones iniciales pueden incluirse directamente en el proceso de integración.

Supongamos por simplicidad que $x_0 = 0$, entonces

$$\int_0^x d(ye^{ax}) = \Big[ye^{ax} \Big]_0^x = ye^{ax} - y_0 = \int_{y_0}^{y} g(x)e^{ax}dx,$$

es decir que

$$y = e^{-ax}\left[\int_{y_0}^{y} g(x)e^{ax}dx + y_0\right]$$

es la solución particular de la ecuación diferencial.

Como caso particular estudiaremos qué ocurre cuando el término $g(x)$ permanece constante. Este tipo de ecuación ha sido, como veremos, la base de importantes modelos en la Economía.

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes tienen la forma

$$y' + ay = b.$$

Multiplicando ambos miembros por e^{ax}, resulta

$$y'e^{ax} + aye^{ax} = be^{ax} \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{ax}) = be^{ax},$$

por tanto

$$ye^{ax} = b\int e^{ax}dx + C \Rightarrow y = e^{-ax}\frac{b}{a}e^{ax} + Ce^{-ax} \Rightarrow y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Para comprender en profundidad el sentido de esta solución es necesario interpretarla como la suma de la solución general más la solución particular de equilibrio, esto es

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a} = Y_g + Y_e,$$

siendo $Y_g = Ce^{-ax}$ la solución general de la ecuación homogénea $y' + ay = 0$ e $Y_e = \frac{b}{a}$ una solución particular, que es posible comprobar de forma inmediata, llamada también *solución estacionaria o de equilibrio*.

Por otra parte si nos planteamos un problema de valores iniciales con $y(0) = y_0$, como $y(0) = C + \frac{b}{a}$ la solución también puede escribirse

$$y(x) = \left[y_0 - \frac{b}{a}\right]e^{-ax} + \frac{b}{a},$$

o más generalmente

$$y(x) = [y_0 - y_e]e^{-ax} + y_e,$$

siendo y_e aquella solución particular constante de la ecuación diferencial dada, es decir $y_e' + ay_e = b,$ ya que obviamente $y_e' = 0.$

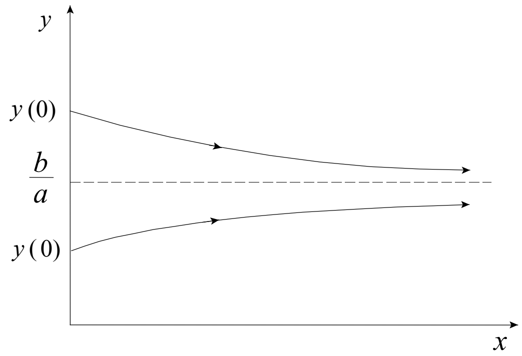


Figura 1.2

En el caso en que $a > 0$, el modelo genera trayectorias estables que convergen, a largo plazo, hacia la trayectoria de equilibrio $y = b/a$, como indica la Figura 1.2. Diremos, en tal caso, que el modelo es estable, pues la solución de equilibrio se alcanza con independencia de las condiciones iniciales.

Ejercicio. Resolver la ecuación $y' + a\,y = b$, como una ecuación de variables separadas.

Ejercicio. Comprobar que la ecuación $\dot{y} + a\,y = b$ puede ser escrita de forma equivalente como $\dot{y} = a\,(y_e - y)$, donde $y_e = b/a$.

Ecuación general lineal

La ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma general

$$y' + p(x)y = g(x),$$

que como resulta evidente no es de variables separadas. Para resolverla multiplicaremos ambos miembros por la expresión $e^{\int p(x)dx}$

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = g(x)e^{\int p(x)dx},$$

donde se verifica

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)dx}) = g(x)e^{\int p(x)dx},$$

por tanto,

$$ye^{\int p(x)dx} = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

resultando

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + Ce^{-\int p(x)dx}.$$

que es la solución general de dicha ecuación.

Ejemplo 1.5

Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + xy = x.$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por la expresión $e^{\int xdx} = e^{\frac{x^2}{2}},$ obtenemos

$$y'e^{\frac{x^2}{2}} + xye^{\frac{x^2}{2}} = xe^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{\frac{x^2}{2}}) = xe^{\frac{x^2}{2}},$$

por tanto

$$ye^{\frac{x^2}{2}} = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx + C,$$

donde resulta

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx + Ce^{-\frac{x^2}{2}},$$

y como $\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{x^2}{2}},$ obtenemos la solución general

$$y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ejercicio. Resolver las ecuaciones diferenciales

1. $y' + y = x,$ con la condición inicial $y(0) = 4.$
2. $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}},$ con la condición inicial $y(1) = 3.$

La ecuación de Bernouilli

Una ecuación de Bernouilli es una generalización de la ecuación lineal que tiene la forma

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0, \qquad (n \neq 1),$$

y puede reducirse a lineal mediante un cambio de variable. Dividiendo toda la ecuación por y^n obtenemos

$$\frac{y'}{y^n}+\frac{p(x)}{y^{n-1}}+q(x)=0.$$

Haciendo $z=\frac{1}{y^{n-1}}=y^{1-n}$ resulta

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\left(y^{1-n}\right)=(1-n)y^{-n}y'=(1-n)\frac{y'}{y^n}\Rightarrow\frac{y'}{y^n}=\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx},$$

por tanto

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z+q(x)=0,$$

donde obtenemos una ecuación lineal que ya sabemos resolver.

Ejercicio. Transformar en una ecuación lineal la ecuación de Bernouilli $y'+xy+y^3=0$ y resolverla. Obtener aquella solución particular que verifica $y(0)=1$.

1.5. Ecuaciones de primer orden en la Economía

Dinámica del precio en el mercado

Consideremos un bien cuyas funciones de oferta y demanda son funciones lineales, que tienen la forma

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha+\beta P, \qquad (\alpha,\beta\in R),\\ Q_s &= \gamma+\delta P, \qquad (\gamma,\delta\in R). \end{aligned}$$

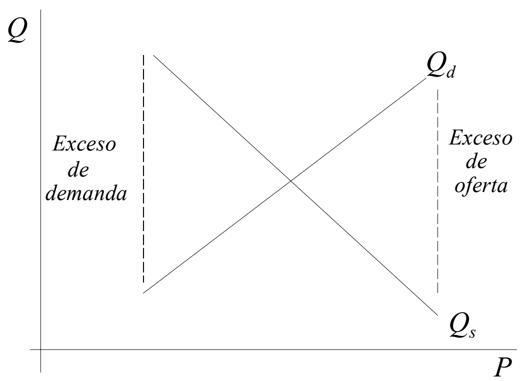


Figura 1.3

El precio de equilibrio del mercado es aquel precio $\overline{P}$ donde se igualan la oferta y la demanda, es decir

$$P_e=\frac{\alpha-\gamma}{-\beta+\delta}.$$

Cuando partimos de un precio de mercado $P(0)$ que no coincide con el precio de equilibrio $\overline{P},$ se produce un proceso de ajuste que lleva el precio hacia su posición de equilibrio $\overline{P}$ a lo largo del tiempo.

Se plantea el siguiente problema: si el proceso de ajuste actúa un tiempo suficientemente grande ¿bajo qué condiciones tenderá dicho proceso a llevar el precio a su nivel de equilibrio?

Resolveremos este problema planteando un modelo de ajuste temporal del precio que denominaremos modelo de ajuste intertemporal walrasiano. La hipótesis básica en que descansa este modelo es que la tasa de cambio del precio, en cada instante, es proporcional al exceso de demanda

$$\frac{dP(t)}{dt} = j(Q_d - Q_s), \qquad (j > 0),$$

donde j representa el coeficiente de ajuste. En este caso el proceso de ajuste implica que la demanda excedente hace subir los precios mientras que el exceso de oferta los hace bajar, por tanto, a largo plazo parece plausible que el precio alcance su valor de equilibrio.

Sustituyendo ahora la oferta y la demanda por sus valores funcionales resulta

$$\frac{dP}{dt} = j(\alpha + \beta P - \gamma - \delta P) = j(\alpha - \gamma) + j(\beta - \delta)P,$$

es decir

$$\frac{dP}{dt} - j(\beta - \delta)P = j(\alpha - \gamma),$$

obteniendo una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma $\frac{dy}{dx} + ay = b$. Recordando que la solución de esta ecuación viene dada por $y(x) = [y_0 - y_e]e^{-ax} + y_e$ se tiene, en nuestro caso, que la solución es

$$P(t) = [P(0) - P_e]e^{j(\beta-\delta)t} + P_e \qquad (1.1)$$

siendo P_e el precio de equilibrio del mercado.

Una cualidad importante del precio de equilibrio es su estabilidad, propiedad que indica cómo los precios convergen hacia el precio de equilibrio con independencia de las condiciones iniciales de que partan. La Figura 1.4 muestra el comportamiento de los precios, respecto al precio de equilibrio, en una situación de estabilidad y de inestabilidad.

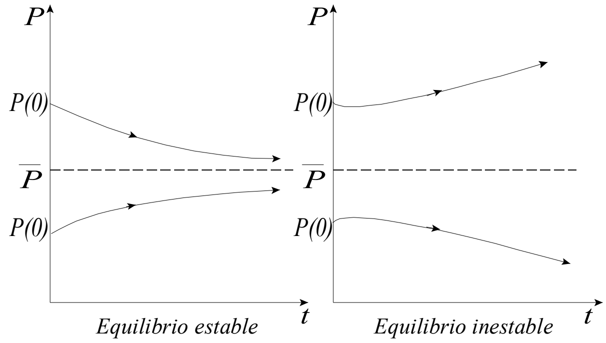


Figura 1.4

La estabilidad del equilibrio se consigue imponiendo restricciones en los parámetros con el fin de que el precio converja a largo plazo hacia el precio $\overline{P}$, es decir, en la ecuación (1.1) tendremos que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_e \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} e^{j(\beta-\delta)t} = 0 \Longleftrightarrow j(\beta-\delta) < 0,$$

como $j > 0$, entonces $\beta < \delta$, es decir, que la pendiente β de la demanda tiene que ser inferior a la pendiente δ de la oferta. El proceso de ajuste más típico se produce en el caso de bienes normales con oferta creciente y demanda decreciente. La Figura 1.5 muestra dos situaciones, una de equilibrio y otra de desequilibrio.

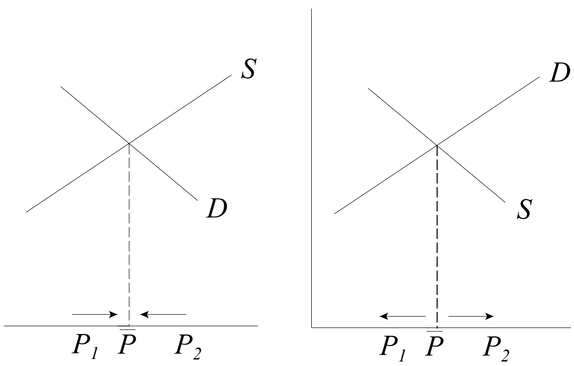


Figura 1.5

1.6. Ecuaciones no lineales

Todos los modelos considerados hasta este momento son modelos donde aparecen ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Como veremos en esta sección, el empleo de ecuaciones diferenciales no lineales enriquece la dinámica del modelo y propicia la existencia de múltiples soluciones de equilibrio. Como ilustración veamos el modelo de crecimiento logístico.

El modelo logístico

El modelo de crecimiento Malthusiano no resulta realista. En una población demasiado grande en relación a su habitat, pronto aparecerán fuerzas que contribuyan al freno de su crecimiento por competencia entre sus individuos. Para ello es preciso traspasar el marco de las ecuaciones diferenciales lineales y hacer una pequeña incursión en las ecuaciones diferenciales no lineales que, como veremos, introducen una considerable riqueza dinámica en la modelización de los fenómenos.

A continuación se presenta un modelo logístico de crecimiento poblacional que refleja la competencia de los miembros de la población por un espacio vital limitado y sus recursos. En este sentido Verhulst, en 1837 formuló el siguiente modelo

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \qquad (a, b > 0),$$

donde $-bx^2$ es el *término de competición* y da cuenta del promedio estadístico del número de encuentros de los miembros por unidad de tiempo que puede considerarse proporcional a x^2.

Si $b \ll a$ y x es pequeño entonces $-bx^2$ es despreciable frente al término ax y el crecimiento es exponencial. Si x es grande entonces $-bx^2$ no es despreciable y sirve de freno al crecimiento rápido de la población.

Como la ecuación logística es de variables separadas podemos resolverla haciendo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{ax - bx^2} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0.$$

Para resolver la primera integral descomponemos el integrando en fracciones simples

$$\frac{1}{ax - bx^2} = \frac{1}{x(a - bx)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a - bx},$$

donde resulta $A = 1/a$ y $B = b/a$, por tanto,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{ax - bx^2} = \int_{x_0}^{x} \left[\frac{1/a}{x} + \frac{b/a}{a - bx} \right] dx = \frac{1}{a} \left[\ln \frac{x}{x_0} + \ln \left| \frac{a - bx_0}{a - bx} \right| \right].$$

Luego

$$\frac{1}{a}\ln\left[\frac{x}{x_0}\left|\frac{a-bx_0}{a-bx}\right|\right]=t-t_0 \Rightarrow e^{a(t-t_0)}=\frac{x}{x_0}\left|\frac{a-bx_0}{a-bx}\right|,$$

finalmente, despejando x

$$x(t)=\frac{ax_0e^{a(t-t_0)}}{a-bx_0+bx_0e^{a(t-t_0)}}=\frac{ax_0}{bx_0+(a-bx_0)e^{-a(t-t_0)}},$$

obtenemos el número de individuos de la población en función del tiempo.

La ecuación logística también puede interpretarse fácilmente en términos de la magnitud $\dot{x}/x$, que se conoce como tasa de crecimiento de la población, que es el incremento porcentual que tiene la población en cada instante. Por ejemplo, en el modelo maltusiano la tasa de crecimiento de la población es constante, en cambio, en el modelo logístico, la tasa de crecimiento $\frac{\dot{x}}{x}=a-bx$ decrece con el tamaño de la población, llegando a tomar el valor cero en $x=a/b$ y siendo negativa a partir de dicho tamaño poblacional.

Características del crecimiento logístico

1. Con independencia de su valor inicial, la población siempre se aproxima al valor límite

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\frac{a\,x_0}{b\,x_0}=\frac{a}{b}.$$

2. Para $x_0<a/b$, las trayectorias de crecimiento del modelo, representadas en la Figura 1.7, tienen una forma característica similar a una “S” alargada que se denomina de crecimiento logístico. Se observa que $x(t)$ es monótona creciente para $0<x_0<a/b$ ya que $\frac{dx}{dt}=x(a-bx)=ax-bx^2$. Además como

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a\frac{dx}{dt}-2bx\frac{dx}{dt}=(a-2bx)x(a-bx),$$

resulta que

$\frac{d^2x}{dt^2}>0$ si $x(t)<\frac{a}{2b}$, en este caso la gráfica de la solución sería convexa

$\frac{d^2x}{dt^2}<0$ si $x(t)>\frac{a}{2b}$, en este caso la gráfica de la solución sería cóncava.

Por tanto, para $x(t) = \frac{a}{2b}$, todas las trayectorias de crecimiento tienen un punto de inflexión.

3. Para $x_0 > a/b$, cada trayectoria $x(t)$ de crecimiento de la población es monótona creciente

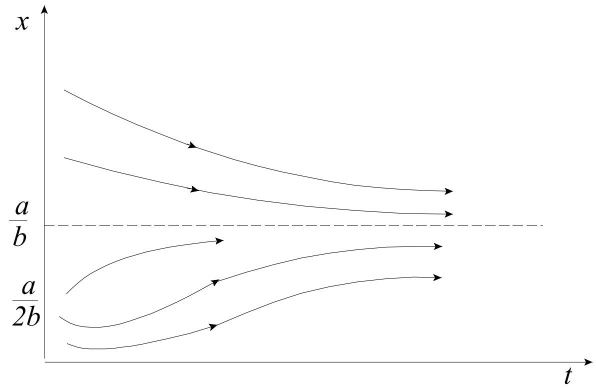


Figura 1.7. *Diversas trayectorias temporales del modelo logístico*

En Ecología, al término a/b se le denomina *nivel de saturación* o *capacidad de carga del medio* y juega un papel primordial como parámetro descriptor de la dinámica poblacional. Antes de que la población alcance la mitad de su límite, el crecimiento es acelerado. Posteriormente llega a una fase de crecimiento pausado donde la tasa de crecimiento $\Delta x/\Delta t$ se hace cada vez más pequeña con el tiempo.

El modelo logístico suele formularse, igualmente, en términos de la propia capacidad de carga *K* del medio, de la forma

$$\frac{dx}{dt} = ax(K - x),$$

donde el término *ax* puede interpretarse como favorecedor del crecimiento, mientras que el término *K-x*, refleja un factor que frena el crecimiento, pues tiende a cero a medida que *x* se acerca a la capacidad de carga del medio *K*.

Ejercicio. Encontrar las trayectorias de crecimiento en el modelo logístico dado por la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = x - x^2$, con la condición inicial $x(0) = 2$.

Puntos de equilibrio

Cuando la ecuación diferencial que rige la dinámica del sistema no depende del tiempo, siendo de la forma $\dot{x} = f(x)$, se dice que es una *ecuación autónoma*. En este caso es posible acudir a un cómodo estudio del comportamiento cualitativo que se centra en el estudio de los *puntos de equilibrio* y su estabilidad sin hallar explícitamente las soluciones.

Una solución de equilibrio[1] de una ecuación $\dot{x} = f(x)$ es una solución $x = k$ que se mantiene constante a lo largo del tiempo. Las soluciones de equilibrio tienen la importante propiedad de que el resto de las soluciones "pivotan" en torno a ellas. Las soluciones de equilibrio que se denominan *estables* serán atractores de soluciones, las *inestables* serán repulsores de soluciones.

Las soluciones de equilibrio se hallan sin más que imponer como condición que la trayectoria $x(t)$ se mantenga constante a lo largo del tiempo, es decir, $\dot{x} = 0,$ por lo que para encontrarlas bastará resolver la ecuación $f(x) = 0.$

Ejemplo 1.6

La ecuación logística $\dot{x} = ax - bx^2$ tiene dos puntos de equilibrio, $x = 0$ y $x = \frac{a}{b},$ que se obtienen sin más que igualar a cero $\dot{x},$ es decir, haciendo $ax - bx^2 = 0.$

Un punto de equilibrio es estable cuando al considerar condiciones iniciales separadas ligeramente de él, la dinámica tiende a llevar al sistema al punto de equilibrio. Representaremos la estabilidad de un punto de equilibrio x_e por medio de flechas convergentes tal y como se indica en la parte superior de la Figura 1.8.

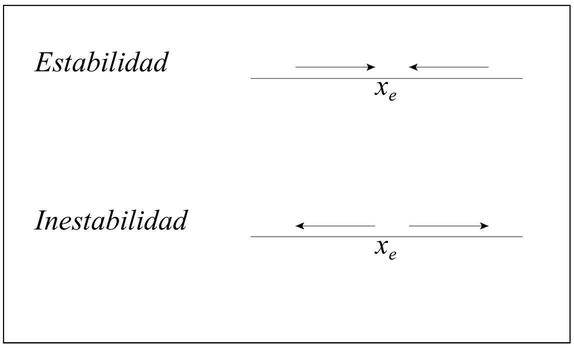


Figura 1.8. *Representación de la estabilidad e inestabilidad de* x_e

Un punto de equilibrio es inestable cuando tras una pequeña separación del punto de equilibrio, por pequeña que sea, la dinámica tiende al alejamiento del punto de equilibrio. Representaremos la inestabilidad de un punto de equilibrio como se indica en la parte inferior de la Figura 1.8

En el siguiente apartado veremos cómo los puntos de equilibrio posibilitan la descripción cualitativa de un sistema para el caso de ecuaciones autónomas.

Diagrama de fase

En las ecuaciones autónomas es posible hacer un estudio del comportamiento cualitativo de las soluciones por medio del diagrama de fase.

[1] Suele usarse igualmente la terminología de punto de equilibrio o punto crítico para designar las soluciones de equilibrio cuando se consideran en el contexto del espacio de fase

Dada una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, el diagrama de fase consiste en la representación gráfica de $\dot{x}$ frente a x. El diagrama de fase revelará, inmediatamente, las soluciones de equilibrio de la ecuación por medio de aquellos puntos donde la gráfica corta al eje OX. El espacio de fase revela, igualmente, la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio.

Para ilustrar esta idea volvamos al modelo logístico $\dot{x} = ax - bx^2$, $(a, b > 0)$, su diagrama de fase está representado en la Figura 1.9

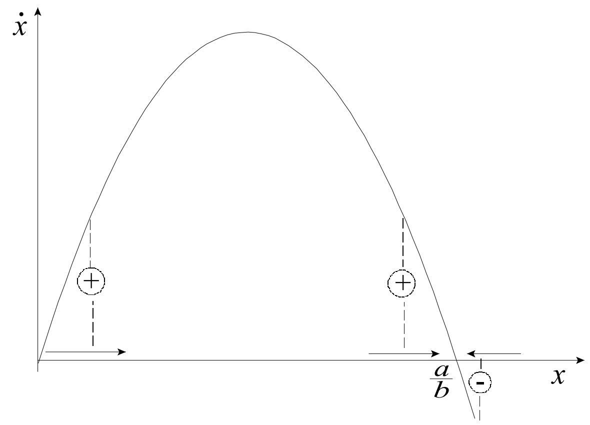


Figura 1.9. *Diagrama de fase de la ecuación logística*

Como hemos visto en el Ejemplo 1.6 aparecen dos soluciones de equilibrio $x = 0$ y $x = \frac{a}{b}$. Con el fin de estudiar su estabilidad veamos el comportamiento de otras soluciones que parten de posiciones iniciales muy cercanas a las de los dos puntos de equilibrio.

i) Si $0 < x_0 < \varepsilon$ entonces $\dot{x} > 0$, luego $x(t)$ tiende a crecer alejándose del origen.

ii) Si $\dfrac{a}{b} - \varepsilon < x_0 < \dfrac{a}{b}$ entonces $\dot{x} < 0$ y $x(t)$ tiende a acercarse al valor $\dfrac{a}{b}$.

iii) Si $\dfrac{a}{b} < x_0 < \dfrac{a}{b} + \varepsilon$ entonces $\dot{x} < 0$ y $x(t)$ tiende a decrecer y a acercarse también al valor $\dfrac{a}{b}$.

En consecuencia, diremos que la solución $x = 0$ es un *punto o solución de equilibrio inestable*. Mientras que la solución $x = a/b$ es un *punto o solución de equilibrio estable* pues tras pequeños cambios la x regresa siempre al valor de equilibrio[2].

Se observa cómo el diagrama de fase representado en la Figura 1.9 permite la reconstrucción de las características cualitativas de la Figura 1.7 que representa el diagrama de trayectorias del modelo para diferentes condiciones iniciales. Nótese cómo el conocimiento de las trayectorias de equilibrio permite la reconstrucción del esquema del conjunto de trayectorias temporales. La trayectoria estable $x = a/b$ actúa como

[2] Con frecuencia también se utiliza el término *solución asintóticamente estable* para designar una solución estable.

atractor de las trayectorias circundantes, mientras que la inestable $x=0$ repele las trayectorias circundantes.

En el siguiente ejemplo vamos a describir el comportamiento cualitativo de las soluciones reconstruyendo el conjunto de trayectorias temporales a partir del espacio de fase.

Ejemplo 1.7

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x}=-ax-bx^2$, $(a,b>0)$.

Representando $\dot{x}$ frente a x obtenemos el diagrama de fase representado en la Figura 1.10. La solución $x=0$ es ahora estable mientras que $x=\frac{a}{b}$ es inestable. También es posible obtener fácilmente un esquema de las trayectorias temporales como se muestra en la Figura 1.11

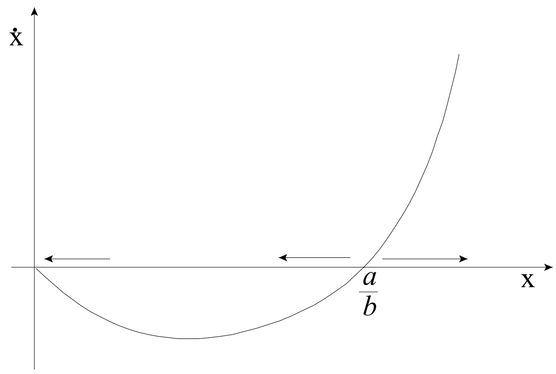


Figura 1.10. *Diagrama de fase de la ecuación* $\dot{x}=-ax-bx^2$

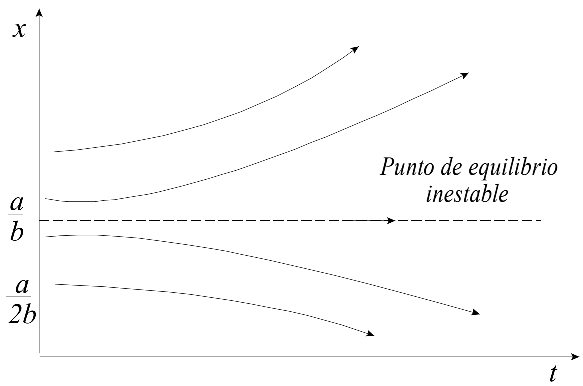


Figura 1.11. *Diversas trayectorias temporales*

Ejercicio. Dibujar el diagrama de fase de la ecuación $\dot{x}=x^2$. Representar igualmente diversas trayectorias frente al tiempo para $x_0>0$ y para $x_0<0$.

Observación

Este tratamiento puede aplicarse a una ecuación lineal con coeficientes constantes del tipo $\dot{x}+ax=b.$ Para fijar ideas, que $a>0$ y $b>0,$ al formar el espacio de estados $\dot{x}=-ax+b$ se observa, en la parte izquierda de la Figura 1.12, que el punto de equilibrio $x=b/a$ es estable. La parte derecha de la Figura 1.12 representa el esquema de trayectorias temporales.

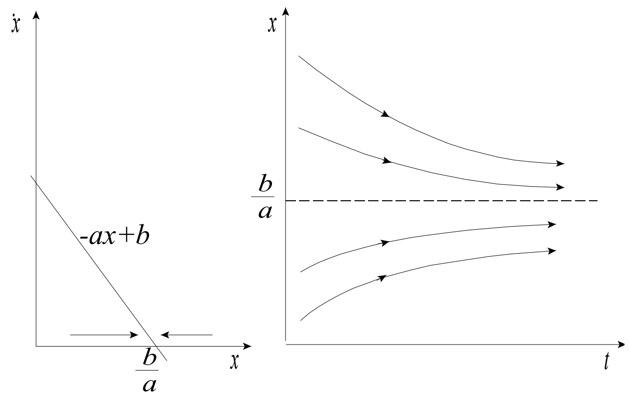


Figura 1.12. *Diagrama de fase y trayectorias temporales de* $\dot{x}+ax=b$

En general, si consideramos la ecuación autónoma $\dot{x}=f(x)$ de modo que la ecuación $f(x)=0$ tenga diversas raíces, como son $0, x_1, x_2, x_3,$ su diagrama de fases $(x,\dot{x})$ será como el que se muestra en la Figura 1.13.

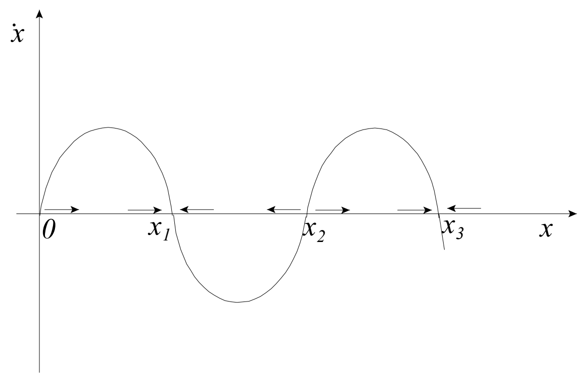


Figura 1.13. *Diagrama de fase de* $\dot{x}=f(x)$ *con diversos puntos de equilibrio*

Observamos que los puntos de equilibrio 0 y x_2 son inestables mientras que los puntos x_1 y x_3 son estables. Un esquema cualitativo de las soluciones se muestra en la Figura 1.14.

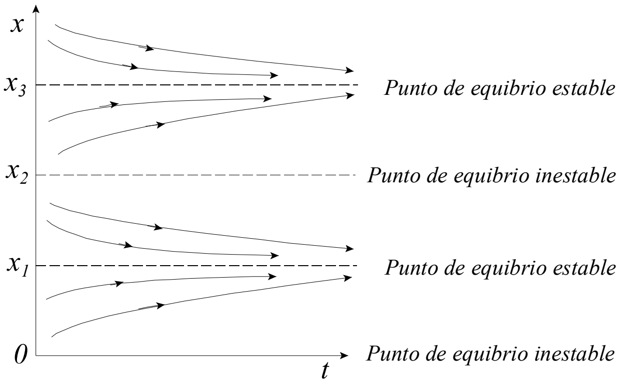


Figura 1.14. *Esquema cualitativo de soluciones*

Ejercicio Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = x^3 - 3x^2 + 2x.$

i) Dibujar su espacio de fase.

ii) Hallar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad.

iii) Dibujar un esquema, espacio temporal, de las trayectorias.

1.7. Ecuaciones exactas y Factores integrantes

Si consideramos la función implícita $\Psi(x, y) = C,$ aplicando derivación implícita resulta que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

que también puede expresarse de la forma

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = 0,$$

cada una de estas dos últimas ecuaciones diferenciales tiene como solución $\Psi(x, y) = C.$

Inversamente, consideremos una ecuación diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

que escribiremos de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Supongamos que existe una función $\Psi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

en tal caso resultará que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = 0,$$

por tanto, la solución de esta ecuación vendrá dada por la función implícita $\Psi(x,y) = C.$ Una ecuación diferencial con estas características se dice que es *exacta*.

La siguiente proposición permite averiguar, de antemano, cuándo una ecuación diferencial es exacta.

Proposición

La ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

es exacta si y sólo si $M_y = N_x$. (Una demostración puede encontrarse en Boyce-DiPrima, 1977).

Las ecuaciones diferenciales exactas pueden resolverse con mucha facilidad.

Ejemplo 1.10

Dada la ecuación diferencial

$$(y\cos x + 2x\,e^y) + (\operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2)y' = 0,$$

demostrar que es exacta y resolverla

por comodidad expresamos esta ecuación de la forma

$$(y\cos x + 2x\,e^y)dx + (\operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2)dy = 0,$$

llamando

$$M(x,y) = y\cos x + 2x\,e^y$$
$$N(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2\, e^y + 2,$$

resulta que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y,$$

por lo que la ecuación diferencial es exacta. Por tanto existirá una función $\Psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = y\cos x + 2xe^{y} = M(x,y) \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = senx + x^2e^{y} + 2 = N(x,y) \qquad (1.5)$$

Para obtener la solución $\Psi(x,y) = C$, podemos integrar parcialmente cada una de las expresiones anteriores. Integrando parcialmente, respecto de x, la ecuación (1.4) obtenemos

$$\Psi(x,y) = y\,\mathrm{sen}\,x + x^2e^{y} + h(y),$$

donde $h(y)$ es una función arbitraria de y. Para obtener la función $h(y)$ derivamos esta última expresión con respecto a $y,$ e igualamos a la ecuación (1.5) resultando

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \mathrm{sen}\,x + x^2e^{y} + h^{'}(y) = \mathrm{sen}\,x + x^2e^{y} + 2.$$

Por tanto $h^{'}(y) = 2 \Rightarrow h(y) = 2y,$ luego

$$\Psi(x,y) = ysenx + x^2e^{y} + 2y,$$

y la solución general de la ecuación diferencial estará definida implícitamente por la expresión

$$y\,\mathrm{sen}\,x + x^2e^{y} + 2y = C,$$

siendo C una constante arbitraria.

Ejercicio Determinar la solución particular de la ecuación dada en el Ejemplo 1.10 que verifica $y(\frac{\pi}{2}) = 1.$

Factor integrante

Presentamos a continuación uno de los métodos más generales y eficaces de resolución analítica de ecuaciones diferenciales.

Si la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta, es posible que exista una función $\mu = \mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0,$$

sea una ecuación diferencial exacta. Tal función $\mu(x,y)$ se le denomina *factor integrante*. Para que la ecuación admita un factor integrante, por la proposición anterior, es necesario y suficiente que

$$(\mu(x,y)M(x,y))_y = (\mu(x,y)N(x,y))_x,$$

es decir

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \Rightarrow \mu_y M - \mu_x N + \mu(M_y - N_x) = 0,$$

que es una ecuación, en derivadas parciales, conocida como ecuación de los factores integrantes.

En general, la obtención de soluciones $\mu(x, y)$, para esta última ecuación, puede resultar más complicada que resolver la ecuación de partida. Por ello, buscaremos factores integrantes que dependan de una sola variable. Si suponemos que μ sólo depende de x, esto es, $\mu = \mu(x)$, entonces, como $\mu_y = 0$, se verificará

$$\mu_x N = \frac{d\mu}{dx} N = \mu(M_y - N_x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} dx.$$

Si $\frac{M_y - N_x}{N}$ es función sólo de x, entonces esta última ecuación es de variables separadas y podemos obtener un factor integrante que depende sólo de x, es decir

$$\ln \mu = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}.$$

De forma análoga, la condición para que exista un factor integrante $\mu = \mu(y)$, es que $\frac{M_y - N_x}{M}$ sea una función exclusivamente de y, en tal caso, el factor integrante resultará ser

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{M_y - N_x}{N} dy}.$$

Dejamos la demostración de este resultado como un ejercicio para el lector.

Ejemplo 1.11

Consideremos la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \Rightarrow (3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0,$$

haciendo

$$M(x, y) = 3xy + y^2$$
$$N(x,y) = x^2+xy,$$

se observa que $M_y \neq N_x$ por lo que la ecuación diferencial no es exacta, pero la expresión $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ es sólo función de x, luego existe un factor integrante $\mu(x)$ que sólo depende de x y que puede obtenerse integrando, luego

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \mu(x) = x.$$

Por tanto, multiplicando por x la ecuación diferencial inicial resulta

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta, luego existe una función $\Psi(x, y)$ que verifica

$$M = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2, \qquad N = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^3 + x^2y.$$

Integrando la primera expresión respecto a x, resulta

$$\Psi = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + f(y),$$

donde $f(y)$ es una función arbitraria de y. Derivando ahora respecto de y se tiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^3 + x^2y + f'(y) = x^3 + x^2y \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C,$$

por tanto la solución de la ecuación es

$$\Psi = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + C.$$

Ejercicio Probar, por comprobación directa, que el otro factor integrante del Ejemplo 1.11 es

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)}.$$

1.8. Ecuaciones diferenciales de orden n

Una ecuación diferencial de orden n es una expresión del tipo

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

que describe una determinada relación entre una función $y(x)$ y sus derivadas. El orden n de la derivada más alta se denomina *orden de la ecuación diferencial*. Por ejemplo, la ecuación $F(x, y, y', y'') = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden.

Diremos que una ecuación de orden n está en *forma normal* cuando puede escribirse de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

En las ecuaciones diferenciales de primer orden $y' = f(x, y)$, encontramos que una solución general depende de una constante arbitraria. Parece lógico suponer que la solución general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden dependerá de dos constantes arbitrarias. Veamos, en este sentido, el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.12

Vamos a resolver la ecuación diferencial de segundo orden $y''=g(x)$. Para ello, como $y''=\frac{dy'}{dx}$, expresamos la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy'}{dx}=g(x),$$

cuya solución depende de dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 y se expresa

$$y'=\int g(x)dx+C_1 \Rightarrow y=\int\left[\int g(x)dx\right]dx+C_1x+C_2.$$

En general, una ecuación diferencial de orden n tendrá una infinidad de soluciones que dependerán, en principio, de n constantes arbitrarias. La determinación de una solución particular habrá de hacerse imponiendo condiciones adicionales según indica el siguiente teorema.

Teorema de existencia y unicidad

Dada la ecuación diferencial de segundo orden $y''=f(x,y,y')$, si $f,\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y'}$ son funciones continuas en una región abierta R del espacio tridimensional que contiene al punto (x_0,y_0,y_0'), entonces en algún intervalo en torno a x_0 existe una solución única $y=\phi(x)$ del problema de valores iniciales

$$\begin{gathered} y''=f(x,y,y') \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0'. \end{gathered}$$

Este teorema se generaliza a las ecuaciones diferenciales de orden n.

Para conseguir la unicidad de las soluciones de la ecuación $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$ habrá que imponer n condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

Una ecuación diferencial de orden n junto con un conjunto de n condiciones iniciales, expresadas habitualmente en la forma anterior, se conoce como un *problema de valores iniciales.* El problema de valores iniciales n dimensional tendrá solución única.

Ejemplo

Consideremos la ecuación de segundo orden $y''+y=0$. Observemos que es diferencia de las ecuaciones de primer orden, dos soluciones particulares suyas como son $y_1=\operatorname{sen}x$, $y_2=\cos x$, se puede cortar en el plano *XY,* por ejemplo en $x_0=\pi/4$. No obstante esta situación no contradice el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de segundo orden pues el punto $x_0 = \pi/4$ las derivadas de ambas funciones no coinciden.

$$y_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{pero } y'_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{pero } y'_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego aunque $y_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$, resulta que $y'_1\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq y'_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1.9 Ecuaciones lineales de orden n

Las ecuaciones lineales de orden n tienen la forma

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = Q(x),$$

donde suponemos que las funciones $P_i(x)$, para $i = 0,1,...,n$, gozan de las buenas propiedades habituales de continuidad. Como veremos, en la solución de esta ecuación juega un papel clave la llamada *ecuación lineal homogénea* asociada que corresponde al caso $Q(x) = 0$, esto es

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = 0.$$

La linealidad permitirá expresar las infinitas soluciones que tiene la ecuación homogénea como combinación lineal de una base de soluciones y dará pie al concepto de solución general de la ecuación diferencial. En este sentido es clave el siguiente resultado.

Principio de superposición de soluciones

Las soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n forman un espacio vectorial. Esto quiere decir que si $y_1(x)$, $y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$, son soluciones de la ecuación homogénea, también lo es la siguiente expresión

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x),$$

siendo C_i constantes reales para todo $i = 1,2,...n$.

Los siguientes ejercicios propuestos profundizan en el principio de superposición de soluciones.

Ejercicio

1. Demostrar que si la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 3y = 0$ tiene dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, también son soluciones las combinaciones lineales $y_1(x) + y_2(x)$,

$Cy_1(x), Cy_2(x),\ C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$

2. Demostrar que $y_1(x)=x+1$ es una solución de la ecuación diferencial $y''+3y'+y=x+4,$ pero en cambio $2(x+1)$ no es una solución.

Como es bien sabido, la forma más sencilla de expresar los elementos de un espacio vectorial es por medio de una base. Una base es un conjunto de vectores linealmente independientes que son capaces de generar cualquier otro vector como combinación lineal suya.

Recordemos que un conjunto de soluciones son linealmente independientes si $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)=0 \Rightarrow C_1=0, C_2=0, ..., C_n=0.$

Ejercicio

Comprobar que $\{e^x, e^{-x}\}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y''-y=0,$ mientras que $\{e^x, 2e^x, e^{-x}\}$ son soluciones linealmente dependientes de dicha ecuación.

El principio de superposición posibilita la introducción del concepto de *solución general* de una ecuación homogénea de orden n que se definirá como una combinación lineal con coeficientes arbitrarios, $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x),$ de n soluciones linealmente independientes.

El siguiente teorema proporciona un criterio muy sencillo y práctico de independencia lineal para las soluciones de una ecuación diferencial.

Teorema

Sea la ecuación diferencial homogénea

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+...+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=0, \qquad (1.6)$$

donde las funciones $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ son continuas en un intervalo $(\alpha, \beta).$ Sea $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ un conjunto de n soluciones de dicha ecuación, entonces se verifican las siguientes afirmaciones.

(a) La condición necesaria y suficiente para que un conjunto de n soluciones sea linealmente independiente es que el siguiente determinante $W=W(y_1(x_0), y_2(x_0), ..., y_n(x_0))$, conocido como *determinante wronskiano,* sea distinto de cero en algún punto $x_0 \in (\alpha, \beta),$ esto es

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

(b) Cada solución $y(x)$ de la ecuación es combinación lineal de $y_1(x),$

$y_2(x),\ldots,y_n(x)$. Dicho de otro modo, la dimensión del espacio vectorial de soluciones de una ecuación lineal homogénea de grado n es igual a n.

Ejemplo 1.13

Demostrar que la ecuación $y''-y=0$ tiene dos soluciones independientes de la forma e^{rx}.

Siendo $y=e^{rx}$, entonces $y'=re^{rx}, y''=r^2e^{rx}$. Sustituyendo en la ecuación resulta

$$r^2e^{rx}-e^{rx}=e^{rx}(r^2-1)=0,$$

luego $r=\pm 1$. Por tanto, las funciones e^x y e^{-x} son soluciones de la ecuación $y''-y=0$. Para comprobar su independencia lineal consideramos el wronskiano

$$W(e^x,e^{-x})=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

donde se concluye su independencia por el teorema anterior. La solución general de la ecuación diferencial dada será

$$y(x)=C_1\,e^x+C_2\,e^{-x}.$$

Ejemplo 1.14

Mostrar que la ecuación diferencial

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-6x\frac{dy}{dx}+12y=0,$$

tiene tres soluciones independientes de la forma $y=x^r$.

Derivando esta expresión se tiene

$$\frac{dy}{dx}=rx^{r-1},\ \frac{d^2y}{dx^2}=r(r-1)x^{r-2},\ \frac{d^3y}{dx^3}=r(r-1)(r-2)x^{r-3},$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial resulta

$$r(r-1)(r-2)x^r-6rx^r+12x^r=0\Rightarrow x^r[r(r-1)(r-2)-6r+12]=0,$$

cuyas soluciones son $r_1=2,\ r_2=-2,\ r_3=3$. Por tanto, las soluciones de la ecuación diferencial son $y=x^2, y=x^{-2}, y=x^3$. Estas soluciones son independientes ya que el wronskiano es distinto de cero

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^{-2} \\ 2x & 3x^2 & -2x^{-3} \\ 2 & 6x & 6x^{-4} \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

La solución general es entonces

$$y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^{-2}.$$

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Este tipo de ecuaciones permiten la obtención de soluciones analíticas sin más que resolver ecuaciones algebraicas de orden n.

Consideremos una ecuación diferencial lineal de orden n

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

cuyos coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sean constantes. Para obtener su solución general estudiaremos previamente la ecuación homogénea asociada

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0.$$

Buscamos en la ecuación homogénea soluciones del tipo $y = e^{\lambda x}$. Derivando sucesivamente tendremos

$$y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, ..., y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x},$$

y sustituyendo en la ecuación homogénea resulta

$$e^{\lambda x}[a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n] = 0.$$

A la ecuación

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

se le llama *ecuación característica* de la ecuación diferencial.

Atendiendo a la naturaleza de las soluciones de la ecuación característica podemos distinguir diversos casos que exponemos a continuación.

Raíces reales y distintas

Si las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la ecuación característica son reales y distintas, las soluciones $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ serán linealmente independientes, pues su wronskiano tiene la forma

$$W=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x}\cdots e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Este último determinante, conocido como determinante de Van der Monde es distinto de cero siempre que $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i \neq j$.

Por tanto, la solución general será de la forma

$$y=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}+\dots+C_n e^{\lambda_n x}.$$

Ejemplo 1.15

Resolver la ecuación diferencial $y'''-7y'-6y=0.$

La ecuación característica es $\lambda^3-7\lambda-6=0,$ cuyas soluciones son $\lambda=3,-1,-2.$ La solución general será entonces $y=C_1 e^{3x}+C_2 e^{-x}+C_3 e^{-2x}.$

Raíces reales múltiples

Si λ es una raíz múltiple de orden p, entonces puede demostrarse que la ecuación admitirá p soluciones particulares linealmente independientes de la forma

$$y_1=e^{\lambda x}, y_2=xe^{\lambda x},\dots,y_p=x^{p-1}e^{\lambda x}.$$

La independencia resulta fácilmente demostrable en el caso de soluciones con multiplicidad 2, pues en este caso

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}+x\lambda e^{\lambda x} \end{vmatrix}=e^{2\lambda x}\neq 0.$$

Ejemplo 1.16

Resolver la ecuación diferencial $y^{iv}+3y'''+3y''+y'=0.$

La ecuación característica es $\lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2+\lambda=0,$ cuyas soluciones son $\lambda=0$ y $\lambda=-1$ triple. La solución general será $y=C_1+e^{-x}(C_2+C_3x+C_4x^2).$

Ejercicio Hallar la solución del problema de valores iniciales:
$y''-y=0;\ y(0)=1;\ y'(0)=-1.$

Ejercicio Sea la ecuación diferencial $y''+a_1y'+a_2y=0.$ Supongamos que la ecuación característica tiene una raíz doble λ. Demostrar que $x e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación de partida.

Raíces complejas simples

En este apartado necesitamos introducir la denominada *identidad de Euler*

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Esta identidad se deduce de los desarrollos de Taylor de las funciones e^x, $\mathrm{sen}\,x$, y $\cos x$, como sigue. Dado que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$
$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \ldots,$$

resulta

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \ldots + \frac{(i\alpha)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \left[1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots \pm \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \mp \ldots\right] + i\left[\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots \pm \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \ldots\right].$$

Luego se verifica la identidad de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Se observa que para $\alpha = \pi$ obtenemos la identidad $e^{i\pi} + 1 = 0$, expresión que reúne las cinco constantes más importantes de las Matemáticas.

Si la ecuación característica tiene raíces imaginarias $a \pm bi$, éstas darán lugar, dentro de la solución general, a un sumando del tipo

$$C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x} = e^{ax}(C_1 e^{bix} + C_2 e^{-bix}),$$

con soluciones complejas carentes de sentido en la forma que están expresadas. No obstante, las soluciones particulares $e^{(a+bi)x}$ y $e^{(a-bi)x}$ pueden ser combinadas para conseguir, a partir de ellas, otra pareja de soluciones particulares más adecuadas. Recordemos que por la linealidad y homogeneidad de la ecuación diferencial que estudiamos, cualquier combinación lineal de soluciones constituye también una solución. Por tanto, las siguientes expresiones son soluciones de la ecuación de partida

$$\frac{e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}}{2} = \frac{1}{2}e^{ax}(\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx) + \frac{1}{2}e^{ax}(\cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx) =$$
$$= e^{ax}\cos bx$$

$$\frac{e^{(a+bi)x}-e^{(a-bi)x}}{2i}=\frac{1}{2i}e^{ax}(\cos bx+i\,\mathrm{sen}bx)-\frac{1}{2i}e^{ax}(\cos bx-i\,\mathrm{sen}bx)=$$
$$=e^{ax}\mathrm{sen}bx.$$

Puede demostrarse que ambas soluciones son independientes. Esta pareja de soluciones contribuye a la solución general con un sumando del tipo

$$y=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\mathrm{sen}bx.$$

Ejemplo 1.17

Resolver la ecuación diferencial $y''-2y'+17y=0.$

La ecuación característica $\lambda^2-2\lambda+17=0$ tiene dos raíces imaginarias $\lambda=1\pm 4i,$ por tanto, la solución general será $y=e^x(C_1\cos 4x+C_2\,\mathrm{sen}4x).$

Raíces complejas múltiples

Si la raíz imaginaria $a+bi$ tiene multiplicidad s en la ecuación característica, su compleja conjugada $\overline{a+bi}=a-bi$ también tendrá la misma multiplicidad. Por tanto, a las raíces $a\pm bi,$ les corresponden $2s$ soluciones complejas

$$e^{(a+bi)x}, xe^{(a+bi)x},..., x^{s-1}e^{(a+bi)x}$$
$$e^{(a-bi)x}, xe^{(a-bi)x},.., x^{s-1}e^{(a-bi)x},$$

Por un procedimiento totalmente análogo al empleado en el caso de soluciones complejas simples, es fácil comprobar que estas soluciones proporcionan $2s$ soluciones reales linealmente independientes, considerando sus partes reales e imaginarias

$$\begin{array}{cc} e^{ax}\cos bx, & e^{ax}\mathrm{sen}\,bx \\ xe^{ax}\cos bx, & xe^{ax}\mathrm{sen}\,bx \\ \dots & \dots \\ x^{s-1}e^{ax}\cos bx, & x^{s-1}e^{ax}\mathrm{sen}\,bx. \end{array}$$

Ejemplo 1.18

La ecuación diferencial $y^{iv}+2y''+y=0,$ tiene como ecuación característica $\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)^2=0,$ cuyas soluciones imaginarias son $\lambda=i$ doble y $\lambda=-i$ doble. La solución general vendrá dada por

$$y=C_1\cos x+C_2\,\mathrm{sen}x+C_3x\cos x+C_4x\,\mathrm{sen}x.$$

Ecuaciones lineales no homogéneas

Deseamos ahora encontrar la solución de la ecuación diferencial *no homogénea* o *completa*

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+...+P_n(x)y=g(x). \qquad (1.7)$$

En este sentido, resulta clave el siguiente resultado que relaciona las soluciones de las ecuaciones homogéneas y no homogéneas.

Proposición

Si y_1 e y_2 son dos soluciones particulares de la ecuación no homogénea (1.7), entonces $y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea (1.6).

Demostración

Si y_1 e y_2 son dos soluciones particulares de la ecuación no homogénea tendremos

$$y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + P_n(x)y_1 = g(x)$$
$$y_2^{(n)} + P_1(x)y_2^{(n-1)} + ... + P_n(x)y_2 = g(x),$$

restando ambas ecuaciones resulta

$$(y_1 - y_2)^{(n)} + P_1(x)(y_1 - y_2)^{(n-1)} + ... + P_n(x)(y_1 - y_2) = 0.$$

Por tanto, $y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea, como queríamos demostrar.

La solución general de la ecuación no homogénea puede obtenerse a través del siguiente corolario.

Corolario

Sea $R(x)$ una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea, entonces cualquier otra solución y de la ecuación no homogénea es de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x) + R(x),$$

donde $C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea.

Demostración

Si $y(x)$ y $R(x)$ son soluciones de la ecuación no homogénea, aplicando la proposición anterior, $y(x) - R(x)$ es una solución de la ecuación homogénea, entonces existen constantes $C_1, C_2, ...C_n \in R$ tales que

$$y(x) - R(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x),$$

lo que concluye la demostración.

Ejercicio

i) Comprobar que $y = \ln x$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 6x\frac{dy}{dx} + 12y = 12\ln x - 4,$$

y que entonces su solución general será

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^{-2} + \ln x.$$

ii) Hallar dos constantes a y b para que $y = a \ln x + b$ sea solución particular de la ecuación

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 6x \frac{dy}{dx} + 12y = 12 \ln x.$$

Según el corolario anterior, para hallar la solución general de una ecuación no homogénea el único problema que queda por resolver es el de hallar una solución particular de dicha ecuación no homogénea. Describiremos dos procedimientos alternativos para buscar soluciones particulares, el método de los coeficientes indeterminados y el método de variación de las constantes.

Método de los coeficientes indeterminados

Dada la ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x),$$

el método de los coeficientes indeterminados se basa en el siguiente principio, la ecuación no homogénea tendrá una solución particular con una forma funcional "similar" a la función $b(x)$, pero con unos coeficientes indeterminados que habrá que ajustar. Este principio no es universal, pero funciona bien en muchos casos concretos, veamos algunos de ellos.

Caso 1.

Supongamos que $b(x) = P_m(x)$, donde $P_m(x)$ es un polinomio de grado m y la ecuación característica no tiene ninguna raíz nula.

En este caso buscaremos una solución particular de la forma

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

donde habrá que determinar los coeficientes A_i.

Si la ecuación característica posee una raíz nula de multiplicidad r, la solución particular será de la forma

$$x^r (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m).$$

Ejemplo 1.19

La ecuación diferencial $y'' + 2y' - 3y = 7$, tiene como solución general de la ecuación homogénea la expresión $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$. Buscamos una solución particular del tipo $y = A$. Sustituyendo en la ecuación diferencial resulta que $A = -7/3$ y por tanto $y = -7/3$. Luego la solución de la ecuación diferencial será $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - 7/3$.

Ejemplo 1.20

Resolver la ecuación diferencial $y^{iv} + 2y''' - 3y'' = 2x + 1$.

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 0$ doble. La solución general de la ecuación homogénea será

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + (C_3 x + C_4)$$

Por ser $\lambda_3 = 0$ una raíz doble de la ecuación característica probamos con una solución particular $y = x^2 (A_0 x + A_1)$, es decir, $y = A_0 x^3 + A_1 x^2$. Derivando cuatro veces se tiene, $y' = 3A_0 x^2 + 2A_1 x$, $y'' = 6A_0 x + 2A_1$, $y''' = 6A_0$, $y^{iv} = 0$. Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial de partida resulta $12A_0 - 18A_0 x - 6A_1 = 2x + 1$. Identificando en esta igualdad polinomial los coeficientes que corresponden a los términos del mismo grado obtenemos $A_0 = -1/9$ y $A_1 = -11/9$. La solución particular será entonces

$$y_p = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{9}x^2,$$

y la solución general resulta

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + C_3 x + C_4 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{9}x^2.$$

Caso 2.

Supongamos que $b(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$, donde $P_m(x)$ es un polinomio de grado m y α no es raíz de la ecuación característica.

En este caso buscamos una solución particular de la forma

$$(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_{m-1} x + A_m) e^{\alpha x}.$$

Si α es una raíz de la ecuación característica con multiplicidad r, la solución particular tendrá la forma

$$x^r (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_{m-1} x + A_m) e^{\alpha x}.$$

Ejemplo 1.21

Resolver la ecuación diferencial $y'' - y = (x+1)e^x$.

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. La solución general de la ecuación homogénea será $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Como $\alpha = 1$ es solución de la ecuación característica, buscaremos una solución particular de la forma $y = x(A_0 x + A_1)e^x = (A_0 x^2 + A_1 x)e^x$. Hallando las dos primeras derivadas y sustituyendo en la ecuación resulta $4A_0 x + 2A_0 + 2A_1 = x + 1$. Identificando coeficientes obtenemos $A_0 = 1/4$ y $A_1 = 1/4$. La solución particular será $y_p = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x)e^x$, y la solución general

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x)e^x.$$

Caso 3.

Suponemos que $b(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + P_{m_2}(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x],$ donde $P_{m_1}(x)$ y $P_{m_2}(x)$ son polinomios de grado m_1 y m_2, respectivamente, y $\alpha \pm \beta i$ no coincide con alguna de las raíces características de la ecuación homogénea.

Entonces, probamos con una solución particular de la forma

$$e^{\alpha x}[(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_m)\cos\beta x + (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + ... + B_m)\,\mathrm{sen}\,\beta x],$$

donde $m = \text{máx}\,\{m_1, m_2\}.$

Si $\alpha \pm \beta i$ es una de las raíces características de la ecuación homogénea con multiplicidad r, la solución particular buscada será de la forma

$$x^r e^{\alpha x}[(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + .. + A_m)\cos\beta x + (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + .. + B_m)\,\mathrm{sen}\,\beta x].$$

Ejemplo 1.22

Resolver la ecuación diferencial $y'' - y = x\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x.$

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1.$ La solución general de la ecuación homogénea será $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$ La solución particular vendrá dada por

$$y = (A_0 x + A_1)\cos x + (B_0 x + B_1)\,\mathrm{sen}\,x.$$

Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación resulta

$$(-2A_0 x - 2A_1 + 2B_0)\cos x + (-2B_0 x - 2B_1 - 2A_0)\,\mathrm{sen}\,x = x\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x,$$

identificando coeficientes se tiene

$$\begin{aligned} -2A_0 &= 1 \\ -2A_1 + 2B_0 &= 0 \\ -2B_0 &= 0 \\ -2B_1 - 2A_0 &= 2, \end{aligned}$$

y resolviendo, queda $A_0 = -1/2, A_1 = 0, B_0 = 0, B_1 = -1/2.$ Por tanto la solución particular será $y = -\frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}x,$ y la solución general

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x.$$

Caso 4.

Supongamos que $b(x) = g_1(x) + g_2(x),$ donde cada $g_i(x)$ se encuentra en alguno de los tres casos anteriormente vistos.

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones particulares, respectivamente, de las ecuaciones

$$y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y_1' + a_n y_1 = g_1(x) \qquad (1.8)$$

$$y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y_2' + a_n y_2 = g_2(x). \qquad (1.9)$$

Por la linealidad, es inmediato comprobar que la función $y_1(x) + y_2(x)$ es solución particular de la ecuación

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = g_1(x) + g_2(x) = b(x).$$

Por tanto, para hallar una solución particular de esta última ecuación, la descompondremos en dos ecuaciones del tipo indicado por las ecuaciones (1.8) y (1.9), donde el segundo miembro corresponde a alguno de los tres casos anteriormente considerados.

Ejemplo 1.23

Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y = x^2 + e^x.$

Calculamos la ecuación característica $\lambda^2 - 4 = 0,$ que tiene como soluciones $\lambda = \pm 2.$ Para hallar la solución particular estudiamos por separado las ecuaciones

$$y'' - 4y = x^2$$
$$y'' - 4y = e^x.$$

En la primera de las ecuaciones, buscamos una solución particular del tipo $y = Ax^2 + Bx + C.$ Como $y' = 2Ax + B, y'' = 2A,$ sustituyendo en la primera ecuación resulta $2A - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2.$ Identificando coeficientes se tiene $-4A = 1, -4B = 0, 2A - 4C = 0.$ Por tanto $A = -1/4, B = 0, C = -1/8,$ siendo la solución particular de la primera ecuación

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}.$$

A continuación hallamos la solución particular de la segunda ecuación. Probamos con una solución de la forma $y = ke^x,$ como $y' = ke^x, y'' = ke^x,$ sustituyendo en la ecuación resulta $ke^x - 4ke^x = e^x.$ Por tanto, $k = -\frac{1}{3}$ y la solución particular de la segunda ecuación es

$$y_2(x) = -\frac{1}{3}e^x.$$

La solución particular de la ecuación diferencial de partida será entonces

$$y_1(x) + y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{3}e^x,$$

y la solución general

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{3}e^x.$$

Ejemplo 1.24

Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $y'' - y = 1 + e^x$.

En este caso las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 - 1 = 0$, son $\lambda = \pm 1$. La ecuación $y'' - y = 1$ tiene como solución particular $y_1(x) = -1$. Para hallar la solución particular de la ecuación $y'' - y = e^x$, como $\lambda = 1$ es una de las raíces características, habrá que buscar una solución del tipo $y_2(x) = kxe^x$.

Como $y_2'(x) = ke^x + kxe^x$, $y_2''(x) = 2ke^x + kxe^x$, sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$2ke^x + kxe^x - kxe^x = e^x \Rightarrow 2ke^x = e^x,$$

y por tanto $k = \frac{1}{2}$. La solución particular será entonces $y_2(x) = \frac{1}{2}xe^x$. La solución particular de la ecuación diferencial dada resultará

$$y_1(x) + y_2(x) = -1 + \frac{1}{2}xe^x.$$

Ejercicios propuestos

1. Expresar mediante ecuaciones diferenciales cada uno de los siguientes fenómenos.

   (a) EL uranio U^{238} se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad de uranio presente.

   (b) La población de Las Palmas aumenta a una velocidad proporcional a la población existente en cada momento así como la diferencia entre 600.000 y la población.

   (c) En cierta operación financiera, el aumento de un capital colocado en un banco es directamente proporcional al tiempo transcurrido desde que se colocó el capital.

   (d) Fuerza igual a masa por aceleración.

2. El precio de las acciones de una Compañía aumenta de manera proporcional al cuadrado de su valor presente. El 1-1-1901 una de tales acciones valía una unidad. En la fecha 1-1-1987 la misma acción valía ya 50 unidades. Un determinado holding financiero, viendo que la empresa era rentable, decidió comprar la compañía en el preciso momento en que sus acciones cotizasen 150 unidades. Determinar la fecha exacta en que se producirá tal compra.

3. La renta per cápita de cierto país se duplica cada seis años. Su aumento instantáneo es proporcional al valor presente de dicha renta. Si la renta per cápita era de 10000 dólares con fecha de 1-1-1959, ¿Cuál será la renta per cápita de este país el 1 de enero del año 2000?

4. Consideremos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dP}{dt}+aP=b1 \tag{19}$$

$$\frac{dP}{dt}=a(P_e-P),2 \tag{20}$$

que describen la dinámica del precio en un mercado.

(a) Demostrar que la ecuación (1) puede escribirse en la forma de la ecuación (2), siendo P_e el precio de equilibrio de la ecuación (1).

(b) Comprobar que la ecuación (2) puede escribirse en la forma (1).

7. Demostrar que $y=2x+Ce^x$ es la solución general de la ecuación diferencial $y''-3y'+2y=2x-3$. Hallar la curva integral que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$.

8. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

De variables separadas:

(a) $2xy(x+1)y'=y^2+1$.

(b) $(1+x^3)dy-x^2ydx=0$. Hallar además la solución particular que pasa por el origen de coordenadas.

(c) $dy=2x(y+3)dx$.

(d) $x^3dx+(y+1)^2dy=0$.

Exactas:

(a) $2x\left(ye^{x^2}-1\right)dx+e^{x^2}dy=0$.

(b) $(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$.

(c) $(y\cos x+2xe^y)+(senx+x^2e^y+2)y'=0$.

(d) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy=0$.

9. Reducir a exactas las siguientes ecuaciones diferenciales, buscando un factor integrante del tipo $\mu(x)$ o bien $\mu(y)$.

(a) $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$.

(b) $(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$.

(c) $\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0.$

(d) $y'=e^{2x}+y-1.$

(e) $dx+\left(\frac{x}{y}-seny\right)dy=0.$

(f) $ydx-xdy=0.$

Lineales:

(a) $xy'=y+x^3+3x^2-2x^2.$

(b) $(x-2)y'=y+2(x-2)^2.$

(c) $y'+\left(\frac{y}{x^2}\right)=3e^{\frac{1}{x}}.$

De Bernouilli:

(a) $xyy'-y^2+8x=0.$

(b) $y^2+y'=\frac{y}{x}.$

(c) $y'+\left(\frac{y}{3}\right)=\frac{1}{3}(1-2x)y^4.$

10. En cada una de las siguientes ecuaciones hallar la solución particular indicada.

(a) $xdy+2ydx=0,$ con $y(2)=1.$

(b) $\left(x^2+y^2\right)dx+xydy=0,$ con $y(1)=-1.$

(c) $\cos ydx+\left(1++e^{-x}\right)senydy=0,$ con $y(0)=\frac{\pi}{2}.$

(d) $\left(y^2+xy\right)dx-x^2dy=0,$ con $y(1)=1.$

11. De una función $y(x)$ se saben los siguientes datos: y' es proporcional a y; $y(10)=100$; $y(15)=200$. Determinar completamente la función $y(x)$.

12. Dada la ecuación diferencial $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-6x\frac{dy}{dx}+12y=0.$

(a) Mostrar que tiene tres soluciones linealmente independientes de la forma $y=x^r$.

(b) Verificar que $y=\ln x$ es una integral particular de la ecuación $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-6x\frac{dy}{dx}+12y=12\ln x-4$ y encontrar la solución general de dicha ecuación.

13. Dada la ecuación diferencial $y'''-7y'-6y=0.$

(a) Comprobar mediante sustitución directa que dicha ecuación posee tres soluciones del tipo $y=e^{rx}$ y encontrarlas.

(b) Demostrar que son linealmente independientes.

14. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas.

(a) $y'' - 2y' + 17 = 0.$

(b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

(c) $y^{iv} - 2y''' = 0.$

(d) $y^{iv} - 2y'' + y = 0.$

(e) $y^{v} - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0.$

15. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas.

(a) $y'' + 2y' - 3y = 7.$

(b) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 2x + 10.$

(c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2e^{-x}.$

(d) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2e^{x}.$

(e) $y'' + y = sen2x.$

(f) $y'' + y = senx.$

(g) $y'' + y = 3x^2 - x.$

(h) $y^{iv} + y''' - y'' - y' = 9x^2 - 6x + 1.$

(i) $y'' - 6y' + 9y = 5e^{x} senx.$

(j) $y'' + 2y' + y = e^{-x} x^2 \cos x.$

16. Consideremos el siguiente modelo de mercado con expectativas de precios

$$D(t) = 16 - 4P(t) - 6\frac{dP(t)}{dt} + 4\frac{d^2P(t)}{dt^2}$$
$$S(t) = -8 + 8P(t) + 4\frac{dP(t)}{dt} + 6\frac{d^2P(t)}{dt^2},$$

suponiendo que el ajuste dinámico dentro del mercado se realiza igualando en cada instante la oferta y la demanda.

(a) Obtener la evolución temporal de los precios a partir de las condiciones iniciales $P(0) = 3, P'(0) = -5/2.$

(b) Estudiar la evolución a largo plazo del precio en este mercado.

17. Por interés continuo se conoce aquella forma de prestar dinero donde los intereses se acumulan instantáneamente al capital para producir nuevos intereses.

(a) Encontrar la ecuación diferencial que rige la variación del capital $C(t)$ cuando se presta a interés continuo a una tasa de interés igual a i.

(b) Determinar la evolución del capital con el tiempo.

(c) Partiendo de un capital inicial de 10 u.m. determinar el tiempo necesario para duplicarlo y cuadrupicarlo, respectivamente, si capitaliza instantáneamente a un interés del 10%.

(d) Partiendo de idéntico capital inicial que en el caso c), determinar el tipo de interés necesario para duplicarlo en diez unidades de tiempo.

(e) Qué papel juegan las unidades de tiempo en el modelo determinado en el apartado a).

18. La elasticidad ε de una función $y = f(x)$ se define como $\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$. Determinar la función de demanda $D = D(p)$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) La elasticidad ε de dicha función es -1, para todo $P > 0$.

(b) $\varepsilon = -k$, para todo $P > 0$, donde k es una constante.

(c) $\varepsilon = \frac{-(5P+2P^2)}{D}$ y sabemos además que $D = 500$ cuando $P = 10$.