TEMA1: FUNDAMENTOS DE RADIACIÓN

1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de contorno

El caso de variación temporal armónica es especialmente importante ya que permite escribir una magnitud (campo eléctrico, magnético, corriente eléctrica, etc.) con una dependencia temporal arbitraria mediante una superposición de campos armónicos. En ese caso resulta útil expresar esta dependencia haciendo uso de la exponencial compleja $e^{j\omega t}$, de manera que los campos eléctrico y magnético reales, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$ y $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)$, se escriban como

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right)\\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) &= \mathrm{Re}\left[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right)\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

en donde $\vec{E}(\vec{r})$ o $\vec{H}(\vec{r})$ representan los campos eléctrico y magnético complejos dependientes, exclusivamente, de la posición. En general, cualquier otra magnitud física con dependencia armónica con el tiempo se expresará de una forma similar. Usualmente el factor $e^{j\omega t}$ no se muestra explícitamente en las expresiones en las que intervienen estas magnitudes. Con esta notación las ecuaciones de Maxwell quedan de la forma

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{D} = \rho \quad \text{(a)} && \nabla\times\vec{H} - j\omega\vec{D} = \vec{J} \quad \text{(b)}\\ &\nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{(c)} && \nabla\times\vec{E} + j\omega\vec{B} = 0 \quad \text{(d)}\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

En estas expresiones, tanto los campos como las fuentes son funciones complejas que dependen de la posición, pero no del tiempo. Es usual referirnos a estas ecuaciones como ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia porque son las que se obtendrían de aplicar la transformada de Fourier a las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo.

Aunque no es independiente de las anteriores ecuaciones, es conveniente incluir también la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la carga eléctrica

$$\nabla\cdot\vec{J} = -j\omega\rho \tag{1.1.3}$$

Además, debemos añadir a las ecuaciones de Maxwell las denominadas relaciones constitutivas, que establecen la dependencia de los campos derivados $\vec{D}$ y $\vec{H}$ con los fundamentales $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Para de medios lineales estas dependencias se establecen a través de la permitividad, ε, y la permeabilidad, μ complejas

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\\ \vec{B} &= \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

donde ε_r y μ_r son los valores relativos y $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi\ F/m$ y $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ H/m$ son los valores del vacío. La parte imaginaria de la permitividad compleja $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ es la responsable de las pérdidas producidas por el “movimiento amortiguado” de los dipolos que

configuran los materiales dieléctricos al ser sometidos a un campo alterno. Para medios que posean una conductividad finita σ la relación entre el campo eléctrico y la corriente de conducción, $\vec{J}_c$, está dada por la ley de Ohm $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$. Si consideramos que las corrientes pueden provenir de las fuentes, $\vec{J}$, y de la conductividad del medio, $\vec{J}_c$, la ecuación (1.1.2)(b) queda de la forma

$$\nabla \times \vec{H} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\vec{E} + \vec{J} = j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E} + \vec{J} \tag{1.1.5}$$

Dado que el papel desempeñado por el término σ/ω es similar al de la parte imaginaria de la permitividad, ε'', es habitual englobar ambos términos en uno único. Así, $\varepsilon' - j(\varepsilon'' + \sigma/\omega)$ pasa a ser simplemente $\varepsilon' - j\varepsilon''$, en donde el nuevo factor ε'' incorpora la posible conductividad que pudiera exhibir el medio.

En general, en la superficie de separación entre dos medios los campos presentan algún tipo de discontinuidad que queda expresada a través de las condiciones de contorno. Así, si denominamos $\vec{n}$ al vector unitario normal a la superficie que limita los medios "1" y "2" y que apunta en la dirección de "1" a "2", las condiciones de contorno para los campos son:

$$\begin{aligned} &(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = \rho_S && (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\vec{n} = 0 \\ &\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 && \vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

donde ρ_S y $\vec{J}_S$ son las densidad de carga y corriente superficiales, respectivamente. En el caso en que uno de los medios, por ejemplo el "1", sea un conductor perfecto, los campos en su interior son nulos y, en consecuencia, las condiciones de contorno anteriores se reducen a

$$\begin{aligned} &\vec{D}\cdot\vec{n} = \rho_S && \vec{B}\cdot\vec{n} = 0 \\ &\vec{n}\times\vec{E} = 0 && \vec{n}\times\vec{H} = \vec{J}_S \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

donde se ha omitido el subíndice "2", ya que es el único medio presente en el que los campos no son nulos.

2. Potenciales escalar y vectorial

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales entre las componentes del campo eléctrico y magnético. Generalmente, resulta de especial interés obtener ecuaciones desacopladas en las que sólo aparezca el campo eléctrico o el magnético. Para nuestra deducción supondremos el caso más sencillo en que el medio es el vacío, de manera que $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ y $\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B}$.

Si tomamos el rotacional de (1.1.2)(d) y usamos (1.1.2)(b) encontramos que

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + k_0^2\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{J} \tag{1.2.1}$$

donde $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ es el número de onda en el espacio vacío. Esta es la ecuación que debería ser resuelta para hallar el campo eléctrico supuesta conocida la densidad de corriente $\vec{J}$. Sin embargo, en la práctica es más simple determinar los campos introduciendo los potenciales vectorial, $\vec{A}$, y escalar, Φ.

Dado que la divergencia de $\vec{B}$ es idénticamente nula, podemos expresar $\vec{B}$ como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1.2.2}$$

ya que $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$. Utilizando la ecuación (1.2.2) en (1.1.2)(d), obtenemos

$$\nabla \times \left(\vec{E} + j\omega\vec{A}\right) = 0 \tag{1.2.3}$$

Dado que cualquier función con rotacional nulo puede ser expresada como el gradiente de una función escalar, tenemos

$$\vec{E} + j\omega\vec{A} = -\nabla\Phi \tag{1.2.4}$$

Sustituyendo (1.2.2) y (1.2.4) en (1.1.2)(b), se tiene

$$\nabla \times \mu_0\vec{H} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = j\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E} + \mu_0\vec{J} = j\omega\mu_0\varepsilon_0\left(-j\omega\vec{A} - \nabla\Phi\right) + \mu_0\vec{J} \tag{1.2.5}$$

Utilizando ahora la relación vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2\vec{A}$ y reagrupando términos llegamos a la ecuación

$$\nabla^2\vec{A} + k_0^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} + \nabla\left(\nabla \cdot A + j\omega\mu_0\varepsilon_0\Phi\right) \tag{1.2.6}$$

Dado que para que se satisfaga la relación (1.2.2) sólo el rotacional de $\vec{A}$ queda fijado, tenemos libertad para fijar la divergencia de este vector. Una posible elección, que simplifica la ecuación anterior, es la conocida como *condición de Lorentz*, que establece que

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu_0\varepsilon_0\Phi \tag{1.2.7}$$

Con esta elección la ecuación (1.2.6) se transforma en la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$\nabla^2\vec{A} + k_0^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \tag{1.2.8}$$

De manera análoga, teniendo en cuenta de nuevo la condición de Lorentz, se deduce que el potencial escalar satisface también una ecuación similar

$$\nabla^2\Phi + k_0^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.2.9}$$

Sin embargo, la carga y la corriente no son cantidades independientes ya que están ligadas por la ecuación de continuidad (1.1.3) y, por tanto, no es necesario resolver también esta última

ecuación. De hecho es posible expresar el campo eléctrico en términos del potencial vectorial exclusivamente. Así, introduciendo la condición de Lorentz en (1.2.4) llegamos a la expresión

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A}}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} \tag{1.2.10}$$

3. Radiación producida por una distribución arbitraria de corriente

Las ecuaciones (1.2.8) y (1.2.9) son las transformaciones al dominio de la frecuencia de la ecuación de onda en el dominio del tiempo, cuya forma general es

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f(\vec{r},t) \tag{1.3.1}$$

donde $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ y $f(\vec{x},t)$ representa la distribución de carga o corriente (la fuente), que supondremos está contenida por completo en un recinto V. Es posible demostrar que la solución general a esta ecuación es

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{-1}{4\pi}\int_V \frac{f\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \tag{1.3.2}$$

Nótese que el potencial ψ en el punto $\vec{r}$ y en el instante t, debido a la fuente situada en $\vec{r}\,'$, está retrasado en un tiempo $\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$. Por tanto, la velocidad a la que se propaga la señal es $c \approx 3\times10^8\ m/s$, que es la velocidad de la luz en el vacío.

En el caso particular en que ψ represente el potencial vectorial $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)$ la solución será

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \tag{1.3.3}$$

y para una dependencia temporal la forma $e^{j\omega t}$ tendremos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'\right] = \mathrm{Re}\left[A(\vec{r})e^{j\omega t}\right] \tag{1.3.4}$$

donde $A(\vec{r})$ es el potencial vectorial complejo, dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \tag{1.3.5}$$

En general, nos interesa conocer los campos producidos en puntos muy alejados de la antena, la zona lejana o de radiación. En esta región $|r| >> |\vec{r}\,'|$ para todos los puntos $\vec{r}\,'$ dentro de *V*, por lo que podemos hacer algunas aproximaciones en la expresión (1.3.5).

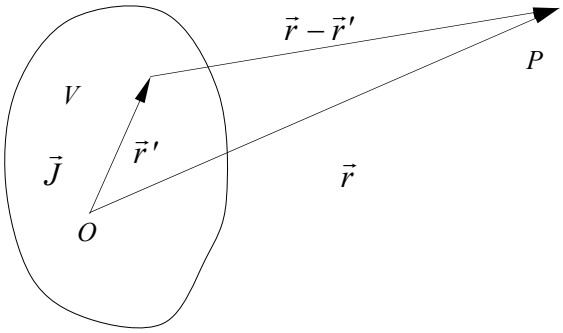

Figura 1

Consideremos que $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{r}$ y $\vec{u}_{r'}$ lo es en la dirección de $\vec{r}\,'$, entonces el desarrollo de $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{r'}\right)^{1/2}$ en serie de Taylor centrada en $r' = 0$ resulta

$$R = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{r'}\right)^{1/2} \approx \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{r'}\right)^{1/2}\Big|_{r'=0} +$$
$$+\left.\frac{2r' - 2r\,\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{r'}}{2\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{r'}\right)^{1/2}}\right|_{r'=0} r' = r - r'\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{r'} = r - \vec{r}\,'\cdot\vec{u}_r \tag{1.3.6}$$

Podemos reemplazar *R* por *r* en el denominador de de amplitud de (1.3.5) ya que el efecto sobre la amplitud del potencial vector será despreciable. Sin embargo, los efectos en el cambio de fase de cada elemento de corriente sí han de ser tenidos en consideración. Así, para la exponencial compleja de (1.3.5) utilizaremos $R \approx r - \vec{r}\,'\cdot\vec{u}_r$. Con estas aproximaciones encontramos que el potencial vector en la zona lejana es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_V \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dV' = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{N} \tag{1.3.7}$$

donde $\vec{N} = \int_V \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dV'$ se denomina vector de radiación.

En el caso en que la corriente se distribuya a lo largo una superficie *S* la expresión del potencial vector en campo lejano queda de la forma $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_S \vec{J}_S(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dS'$, en donde dS' es el elemento de superficie sobre *S* y $\vec{J}_S(\vec{r}\,')$ es la densidad de corriente superficial en el punto $\vec{r}\,'$ de *S*.

Si la corriente fluye por un hilo conductor definido por la curva C el potencial vector en campo lejano es $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_C \vec{I}(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dl'$, en donde dl' es el elemento de longitud sobre la curva C, $\vec{I}(\vec{r}\,') = I(\vec{r}\,')\vec{u}(\vec{r}\,')$ es el vector intensidad de corriente en un punto $\vec{r}\,'$ de la curva y $\vec{u}$ el vector unitario tangente a dicha curva.

El campo eléctrico se deduce introduciendo (1.3.5) en (1.2.10) y conservando sólo las potencias en r^{-1}, ya que son éstas las únicas tienen relevancia en campo lejano.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_V \left[\left(\vec{u}_r\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')\right)\vec{u}_r - \vec{J}(\vec{r}\,')\right]e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dV' \tag{1.3.8}$$

donde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ es la impedancia intrínseca del vacío. La forma del integrando (1.3.8) nos indica que, dada una dirección especificada por el vector unitario $\vec{u}_r$, sólo la componente de corriente perpendicular a $\vec{u}_r$ contribuye al campo de radiación.

Si tenemos en cuenta que $\vec{u}_r\times\left(\vec{u}_r\times\vec{J}\right) = \vec{u}_r\left(\vec{u}_r\cdot\vec{J}\right) - \vec{J}\left(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r\right) = \vec{u}_r\left(\vec{u}_r\cdot\vec{J}\right) - \vec{J}$, podemos escribir (1.3.8) de forma alternativa como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{u}_r\times\left(\vec{u}_r\times\int_V \vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dV'\right) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{u}_r\times\left(\vec{u}_r\times\vec{N}\right) \tag{1.3.9}$$

Tomando en consideración las expresiones (1.2.2) y (1.3.7) deducimos que el campo magnético

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\left(\frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{N}\right) = \nabla\left(\frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\right)\times\vec{N} \tag{1.3.10}$$

Para escribir la última igualdad se ha utilizado el hecho de que $\vec{N}$ es un vector constante. Efectuando operaciones en la expresión anterior y conservando sólo las potencias en r^{-1} obtenemos la expresión

$$\vec{H} = \frac{-jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{u}_r\times\vec{N} \tag{1.3.11}$$

Comparando (1.3.9) con (1.3.11) vemos que los campos eléctrico y magnético están relacionados de forma similar a como lo están las ondas planas, es decir

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Z_0\vec{u}_r\times\vec{H}(\vec{r}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{H}(\vec{r}) = Y_0\vec{u}_r\times\vec{E}(\vec{r}) \tag{1.3.12}$$

donde $Y_0 = Z_0^{-1}$ es la admitancia intrínseca del vacío. Además, estas relaciones nos muestran que en la zona de radiación los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí.

Es interesante también escribir los campos en función del potencial vector. Sustituyendo (1.3.7) en (1.3.9) obtenemos para el campo eléctrico

$$\vec{E} = j\omega\vec{u}_r\times\left(\vec{u}_r\times\vec{A}\right) \tag{1.3.13}$$

y para el magnético

$$\vec{H} = \frac{-j\omega}{Z_0}\vec{u}_r \times \vec{A} \tag{1.3.14}$$

Escribiendo $\vec{A}$ en función de sus componentes esféricas, $\vec{A} = A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta + A_\phi\vec{u}_\phi$, y teniendo en cuenta (1.3.13) y (1.3.14), es fácil ver que

$$\begin{aligned} E_r &= 0 & H_r &= 0 \\ E_\theta &= -j\omega A_\theta & H_\theta &= j\frac{\omega A_\phi}{Z_0} = -\frac{E_\phi}{Z_0} \\ E_\phi &= -j\omega A_\phi & H_\phi &= -j\frac{\omega A_\theta}{Z_0} = \frac{E_\theta}{Z_0} \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Cuando una corriente I fluye por un conductor lineal C la expresión (1.3.8) se transforma en

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_C \left[(\vec{u}_r \cdot \vec{u})\vec{u}_r - \vec{u}\right] I(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dl' \tag{1.3.16}$$

donde $\vec{u}$ es un vector unitario a lo largo de C en la dirección de la corriente y $\vec{r}\,'$ es el vector de posición del elemento de corriente. También se puede hallar el campo eléctrico a través de (1.3.9) con un vector de radiación dado por $\vec{N} = \int_C I(\vec{r}\,')\vec{u}e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dl'$.

Observando las ecuaciones (1.3.8) y (1.3.16) vemos que el campo eléctrico tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{f}(\theta,\phi) \tag{1.3.17}$$

en donde $\vec{f}(\theta,\phi)$ expresa la dependencia angular de $\vec{E}(\vec{r})$, es el patrón de radiación del campo.

4. Corrientes magnéticas y ecuaciones de Maxwell duales

En el apartado 1 se han establecido las ecuaciones de Maxwell para corrientes y cargas eléctricas, que son las únicas que tienen existencia real. Sin embargo, en ciertas ocasiones es conveniente introducir unas cargas y corrientes magnéticas ficticias que simplificarán los cálculos de los campos. Su significado preciso se adquiere a través del teorema de equivalencia. Como se verá en el capítulo 4, son especialmente útiles en el análisis de antenas de apertura.

En este apartado se resumirán, sin demostración, las consecuencias más importantes resultantes de incluir las fuentes magnéticas en las ecuaciones de Maxwell.

Supongamos que en una región del espacio están presentes, exclusivamente, una densidad de carga magnética τ y una densidad de corriente magnética $\vec{M}$. Entonces, las ecuaciones de Maxwell, duales de las (1.1.2), adoptarían la forma

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \text{(a)} && \nabla \times \vec{H} - j\omega\vec{D} = 0 \quad \text{(b)} \\ &\nabla \cdot \vec{B} = \tau \quad \text{(c)} && \nabla \times \vec{E} + j\omega\vec{B} = -\vec{M} \quad \text{(d)} \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Siguiendo un desarrollo similar al del apartado 2, tras imponer la condición de Lorentz $\nabla \cdot \vec{F} = -j\omega\mu_0\varepsilon_0\psi$, se llegaría a las ecuaciones de onda para los potenciales vector, $\vec{F}$, y escalar, ψ, creados por estas fuentes magnéticas. Estas ecuaciones son

$$\nabla^2\vec{F} + k_0^2\vec{F} = -\varepsilon_0\vec{M} \tag{1.4.2}$$

y

$$\nabla^2\psi + k_0^2\psi = -\frac{\tau}{\mu_0} \tag{1.4.3}$$

Al igual que en el caso de fuentes eléctricas, se demuestra que no son necesarias ambas ecuaciones para describir los campos, ya que $\vec{F}$ y ψ están relacionados por la ecuación de continuidad. En concreto, la solución general de es

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \tag{1.4.4}$$

y considerando las aproximaciones de campo lejano se transforma en

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_V \vec{M}(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dV' = \frac{\varepsilon_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{L} \tag{1.4.5}$$

donde $\vec{L} = \int_V \vec{M}(\vec{r}\,')e^{jk_0\vec{u}_r\cdot\vec{r}\,'}dV'$ es el vector de radiación para corrientes magnéticas.

Aplicando las mismas consideraciones que en el caso de corrientes eléctricas se puede deducir que la relación entre el potencial vector y los campos, en situación de campo lejano y cuando sólo hay presentes corrientes magnéticas, es

$$\begin{aligned} E_r &= 0 & H_r &= 0 \\ E_\theta &= Z_0 H_\phi = -j\omega Z_0 F_\phi & H_\theta &= -j\omega F_\theta \\ E_\phi &= -Z_0 H_\theta = j\omega Z_0 F_\theta & H_\phi &= -j\omega F_\phi \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

en donde se ha escrito $\vec{F}$ en función de sus componentes esféricas, $\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_\phi\vec{u}_\phi$. Estas ecuaciones relacionan el campo eléctrico, el magnético y el potencial vector $\vec{F}$ cuando las únicas corrientes que hay presentes son magnéticas. Son las duales de las (1.3.15). En caso de existir fuentes eléctricas también, los campos serían el resultado de sumar las contribuciones producidas por ambos tipos de fuentes.

5. Radiación producida por un dipolo eléctrico elemental

Como aplicación de la expresión (1.3.16) vamos a calcular el campo de radiación producido por un pequeño filamento de corriente de longitud dl situado en el origen de coordenadas y orientado según la dirección z (ver figura 2). Podríamos llegar al mismo resultado calculando el vector de radiación $\vec{N}$ y utilizando la ecuación (1.3.9).

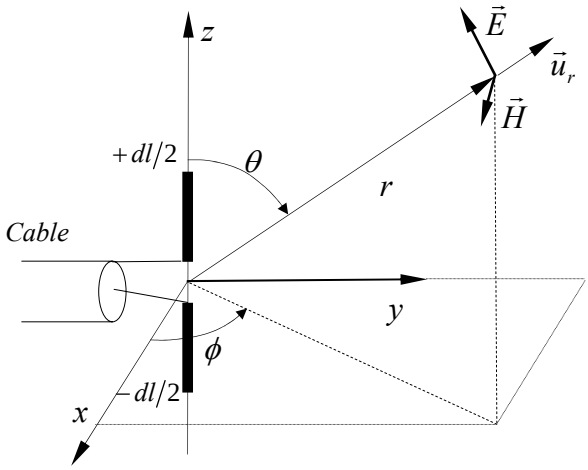

Figura 2

Supondremos que la corriente I es constante a lo largo del filamento. En este caso el vector $\vec{u}$ que define la dirección de la corriente es constante e igual a $\vec{u}_z$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\vec{u}_z = \cos\theta\,\vec{u}_r - \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta$, se obtiene $(\vec{u}_r \cdot \vec{u})\vec{u}_r - \vec{u} = \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta$ y la integral de (1.3.16) queda

$$\int_{-\frac{dl}{2}}^{\frac{dl}{2}} I\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta e^{jk_0 z'\cos\theta} dz' = \frac{2jI\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta}{jk_0\cos\theta}\left(\frac{e^{\frac{jk_0 dl\cos\theta}{2}} - e^{\frac{-jk_0 dl\cos\theta}{2}}}{2j}\right) =$$

$$= \frac{2I\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta}{k_0\cos\theta}\operatorname{sen}\left(\frac{k_0 dl\cos\theta}{2}\right) \tag{1.5.1}$$

Si tenemos en cuenta que el dipolo tiene una longitud muy pequeña en comparación con la longitud de onda, esto es $k_0 dl = 2\pi dl/\lambda_0 << 1$, podemos aproximar $\operatorname{sen}(k_0 dl\cos\theta/2)$ por $k_0 dl\cos\theta/2$, con lo que la integral anterior queda reducida a $Idl\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta$. Finalmente, el campo eléctrico radiado por el dipolo elemental es

$$\vec{E}(\vec{r}) = jZ_0 Idl\,k_0\operatorname{sen}\theta\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{u}_\theta \tag{1.5.2}$$

Haciendo uso de (1.3.12) calculamos el campo magnético

$$\vec{H}(\vec{r}) = jIdl\, k_0 \operatorname{sen}\theta \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{u}_\phi \tag{1.5.3}$$

Vemos que en la zona de radiación los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y perpendiculares al radio vector.

Para calcular el promedio temporal de la potencia radiada utilizamos el vector de Poynting complejo, que, para una onda que se propaga por el vacío (Z_0 real), está dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2}\frac{\vec{E}\cdot\vec{E}^*}{Z_0}\vec{u}_r = Z_0 I I^* (dl)^2 k_0^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{\vec{u}_r}{32\pi^2 r^2} \tag{1.5.4}$$

Vemos que es real, dirigido hacia afuera y decae como r^{-2}. El promedio temporal de la potencia radiada se calcula integrando el vector de Poynting sobre una superficie esférica de radio r

$$P_r = \oint_S \operatorname{Re}\left[\vec{S}\right]\cdot\vec{u}_r dS' = \frac{II^*(dl)^2 k_0^2 Z_0}{32\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi = \frac{II^*(dl)^2 k_0^2 Z_0}{12\pi} \tag{1.5.5}$$

6. Parámetros básicos de una antena

En esta sección introduciremos algunos de los parámetros más importantes que caracterizan una antena en transmisión y en recepción. Algunas de las definiciones que se darán a continuación serán ilustradas mediante el dipolo eléctrico elemental del apartado anterior.

Diagrama de radiación

El diagrama o patrón de radiación de una antena es una representación gráfica de las características de radiación de una antena en función de las direcciones del espacio. Normalmente se empleará un sistema de coordenadas esféricas. Con la antena situada en el origen y manteniendo constante la distancia se expresará el campo eléctrico en función de las variables angulares θ y ϕ. Como el campo es una magnitud vectorial, habrá que determinar en cada punto de la esfera de radio constante el valor de sus dos componentes ortogonales según las direcciones $\vec{u}_\theta$ y $\vec{u}_\phi$.

Como el campo magnético se deriva directamente del eléctrico, la representación podría hacerse a partir de cualquiera de los dos, siendo lo más habitual que el diagrama se refiera al campo eléctrico. El campo se puede representar en forma absoluta o relativa, normalizando el valor máximo a la unidad.

Un diagrama de radiación muy común es aquel que representa la intensidad de radiación o potencia radiada por unidad de ángulo sólido, $K(\theta,\phi) = dP_r(\theta,\phi)/d\Omega$, para cada dirección del espacio definida por los ángulos θ y ϕ. Si $K_{\max}$ es el máximo valor que adquiere $K(\theta,\phi)$, el correspondiente diagrama de radiación normalizado está dado por

$$t(\theta,\phi) = \frac{K(\theta,\phi)}{K_{\max}} \tag{1.6.1}$$

Se puede medir el diagrama de radiación de potencia una antena transmisora, A, desplazando otra antena, denominada sonda, S, a una distancia R constante y registrando la potencia recibida por la sonda en función de la posición angular. Refiriéndonos a la figura 3(a), supongamos que la posición 1 es aquella en la que la sonda S recibe la máxima potencia, $P^S_{\max}$, y, supongamos asimismo, que la potencia recibida por la sonda en la posición 2 es P^S. El diagrama de radiación de potencia normalizado de la antena A se obtiene calculando el cociente $P^S/P^S_{\max}$ para cada posición angular. Este diagrama también podría medirse manteniendo la sonda S fija y rotando la antena A en sentido opuesto ($-\psi$).

Consideremos ahora que la antena A actúa como receptora y que la sonda S lo hace como emisora (figura 3(b)). Si $P^A_{\max}$ es la máxima potencia que recibe la antena A, que ocurre en la posición 1, y P^A es la potencia que recibe A cuando rota un ángulo $-\psi$ en torno a su eje (posición 2), el diagrama de recepción de la antena A se obtiene al medir $P^A/P^A_{\max}$ para cada ángulo de rotación. El teorema de reciprocidad demuestra que $P^S(\psi)/P^S_{\max}$ es igual a $P^A(\psi)/P^A_{\max}$ y, en consecuencia, también lo son los diagramas de radiación y recepción.

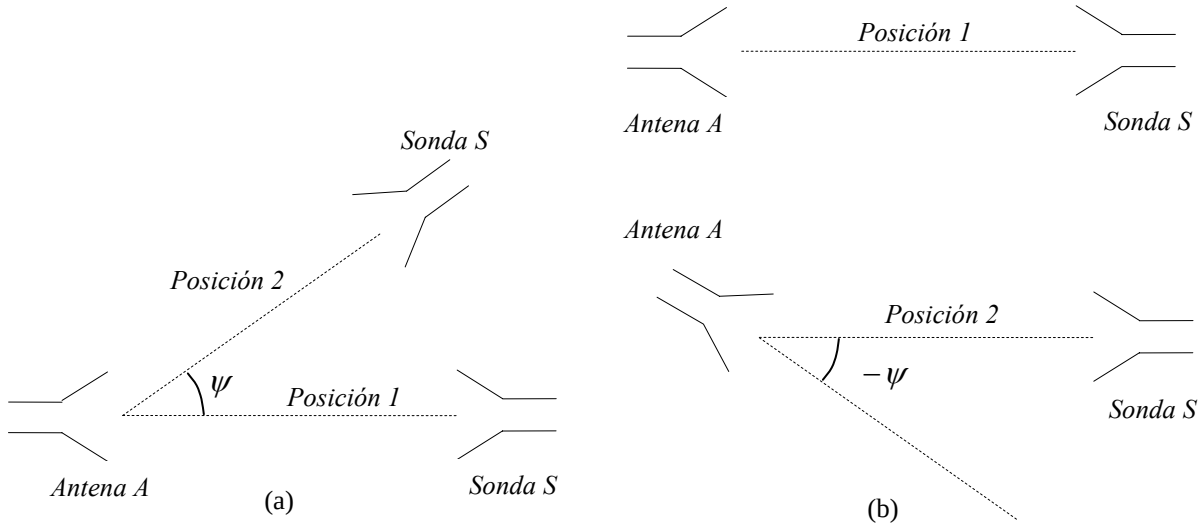

Figura 3

En general, un diagrama completo de radiación, para todo ángulo θ y ϕ (utilizando un sistema de coordenadas esféricas con el eje z como vertical), es difícil de construir por requerir una representación tridimensional. Normalmente, es preferible mostrar ciertos cortes del diagrama tridimensional por planos de interés. Los dos planos más importantes son el plano E y el plano H. Se define plano E como aquel formado por la dirección de máxima intensidad de radiación y el campo eléctrico en dicha dirección. Análogamente, el plano H es el formado por la dirección de máxima radiación y el campo magnético en esa dirección. En el caso del dipolo eléctrico vemos que la potencia varía de acuerdo a $\operatorname{sen}^2\theta$ por lo que la dirección de máxima radiación será $\theta = 90^{\circ}$ y un valor de ϕ arbitrario, ya que la potencia del dipolo no depende de este ángulo. En esa dirección el campo eléctrico está orientado verticalmente y el campo magnético lo está horizontalmente, por lo que el plano E es cualquiera de los planos que pasa por el eje z el plano H es el definido por $\theta = 90^{\circ}$. En la figura 4(a) se ha representado el diagrama de radiación tridimensional de un dipolo eléctrico.

Los cortes con los planos *E* y *H* están representados en las figuras 4(b) y 4(c), respectivamente.

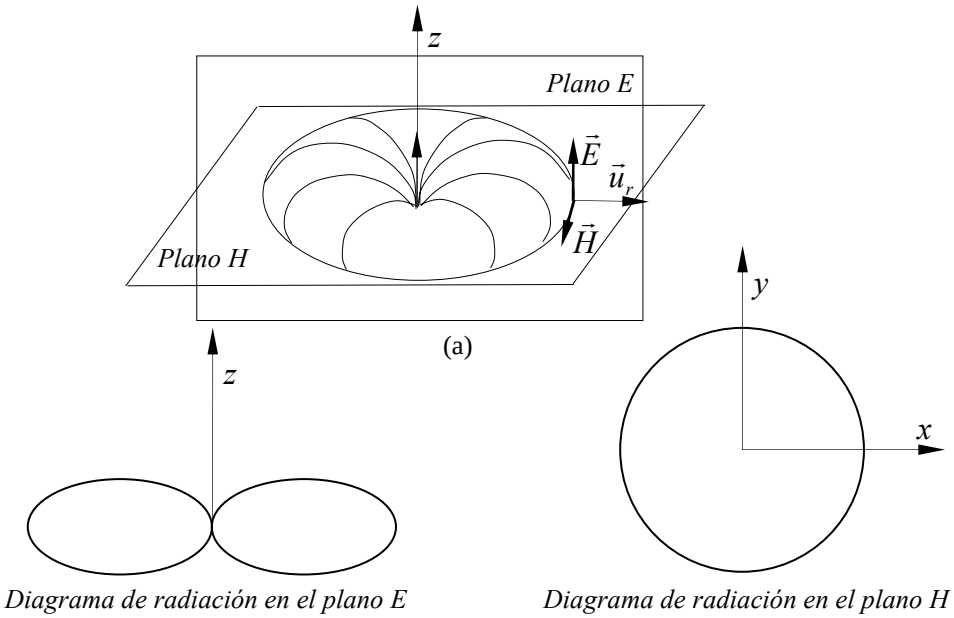

Figura 4

Es bastante habitual la representación del diagrama con escala en decibelios. Si representamos el campo o la potencia normalizadas, la dirección correspondiente al máximo tendrá 0 dB, mientras que las demás direcciones tendrán valores negativos.

En general, los diagramas de la mayoría de las antenas contienen un lóbulo principal y varios lóbulos secundarios, también llamados laterales, de menor amplitud. Dada una determinada sección del diagrama de radiación, se define como ancho de haz del lóbulo principal el ángulo que existe entre las direcciones para las que $K(\theta,\phi)$ se reduce a la mitad de su valor máximo, es decir, disminuye 3 dB (ver figura 5).

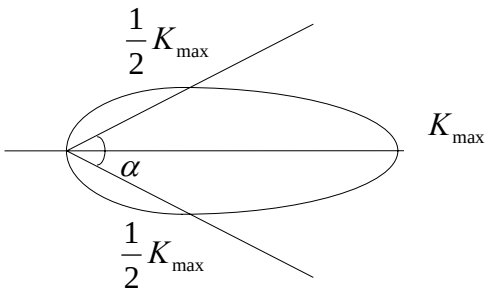

Figura 5

Directividad y Ganancia

Una antena no radia potencia uniformemente en todas direcciones. La directividad de una antena, $D(\theta,\phi)$, es una función que describe la variación de la intensidad de potencia radiada respecto a la dirección espacial.

Se define directividad como la relación entre la intensidad de radiación, $K(\theta,\phi)$, y el promedio de $K(\theta,\phi)$ sobre el ángulo sólido completo, $\frac{1}{4\pi}\oint_{4\pi} K(\theta,\phi)d\Omega$. Para poder disponer de una expresión de la directividad en función del campo eléctrico radiado es necesario relacionar $K(\theta,\phi)$ con el vector de Poynting. Dado que la integral extendida a todo el ángulo sólido de $K(\theta,\phi)=dP_r(\theta,\phi)/d\Omega$ da la potencia total radiada por la antena $P_r=\oint_{4\pi} K(\theta,\phi)d\Omega$ y que, por otro lado, P_r es también el resultado de integrar la potencia radiada por unidad de superficie a una esfera de radio *r* que incluya la antena, se tiene

$$P_r=\oint_{4\pi} K(\theta,\phi)d\Omega=\oint_S \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]\cdot\vec{u}_r dS'=\oint_S \frac{1}{2}\frac{\vec{E}\cdot\vec{E}^*}{Z_0}dS'=\oint_{4\pi}\frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}\right|^2}{Z_0}r^2 d\Omega \tag{1.6.2}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $dS'=r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi=r^2 d\Omega$ es el elemento diferencial de superficie de la esfera y que los campos eléctrico y magnético están relacionados por la impedancia a través de $\vec{H}(\vec{r})=Z_0^{-1}\vec{u}_r\times\vec{E}(\vec{r})$. De la expresión anterior resulta que la intensidad de radiación o potencia radiada por ángulo sólido es

$$K(\theta,\phi)=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]\cdot\vec{u}_r=\frac{1}{2}\frac{r^2}{Z_0}\left|\vec{E}\right|^2 \tag{1.6.3}$$

Y, por tanto, la directividad de la antena es

$$D(\theta,\phi)=\frac{K(\theta,\phi)}{\frac{1}{4\pi}\oint_{4\pi}K(\theta,\phi)d\Omega}=\frac{4\pi\,K(\theta,\phi)}{P_r}=\frac{4\pi\left|\vec{E}(\theta,\phi)\right|^2}{\oint_S\left|\vec{E}(\theta,\phi)\right|^2 dS'} \tag{1.6.4}$$

Es usual llamar a $D(\theta,\phi)$ función directividad y a su máximo valor, simplemente, directividad, *D*. Esta magnitud es una medida de capacidad de la antena para concentrar la potencia radiada en la dirección en la que los campos son más intensos. Su valor está dado por

$$D=\frac{4\pi K_{\max}}{P_r}=\frac{4\pi\left|\vec{E}\right|^2_{\max}}{\oint_{4\pi}\left|\vec{E}(\theta,\phi)\right|^2 d\Omega} \tag{1.6.5}$$

Por simplicidad designaremos por $\mathcal{P}(\theta,\phi)$ a la potencia por unidad de superficie, es decir, al valor del vector de Poynting en la dirección de propagación. Por tanto, tenemos $\mathcal{P}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]\cdot\vec{u}_r=\frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2Z_0}=r^2K$.

El diagrama de radiación de potencia normalizado $t(\theta,\phi)$ y la directividad están íntimamente relacionados. Así, teniendo en cuenta (1.6.4) y (1.6.5) tenemos

$$t(\theta,\phi)=\frac{K(\theta,\phi)}{K_{\max}}=\frac{D(\theta,\phi)}{D} \tag{1.6.6}$$

En el caso particular del dipolo elemental es inmediato comprobar que la intensidad de radiación es

$$K(\theta,\phi)=\frac{Z_0 I I^*(dl)^2\, k_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{32\pi^2} \tag{1.6.7}$$

Por tanto, la función directividad de esta antena es

$$D(\theta,\phi)=\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\theta \tag{1.6.8}$$

y su directividad (máxima) es $3/2$. Este valor se alcanza en cualquier punto del plano $\theta=\pi/2$, lo que significa que esta antena produce una intensidad de radiación, en ese plano, $3/2$ mayor que una antena isotrópica.

La ganancia de potencia difiere de la directividad en un factor que tiene en cuenta la eficacia de la antena. Puesto que todas las antenas tienen pérdidas disipativas debidas a conductividad finita de los conductores que forman parte de ellas, no toda la potencia de entrada es radiada. Así, podemos escribir que sólo una fracción η de la potencia de entrada a la antena, P_{in}, es radiada

$$P_r=\eta P_{in} \tag{1.6.9}$$

La constante η se denomina eficiencia de la antena. Para la mayoría de las antenas η tiene un valor cercano a la unidad. Definimos ganancia de una antena como la relación entre la intensidad de radiación y el promedio de la potencia radiada en todo el ángulo sólido

$$G(\theta,\phi)=\frac{K(\theta,\phi)}{P_{in}/4\pi}=4\pi\eta\frac{K(\theta,\phi)}{P_r}=\eta D(\theta,\phi) \tag{1.6.10}$$

En la práctica, la máxima ganancia, o simplemente, ganancia *G* de una antena es un parámetro más significativo que la directividad puesto que resulta más fácil medir la potencia de entrada que la potencia radiada.

Para ilustrar los conceptos introducidos en estos dos últimos apartados, mostraremos los diagramas de radiación y las curvas de respuesta en frecuencia de dos antenas comerciales de UHF. En las figura 6 aparece la fotografía de una antenas Yagi de tres elementos para la recepción de la banda I de televisión, canales 3 y 4 (de 54 a 68 MHz). Se muestra, además, la gráfica de la ganancia de la antena en función de la frecuencia y el los diagramas de radiación de potencia normalizados en los planos *E* y *H*. En la figura 7 tenemos una antena Yagi de televisión con 7 elementos adaptada a la recepción de la banda BIII (de 174 a 230 MHz).

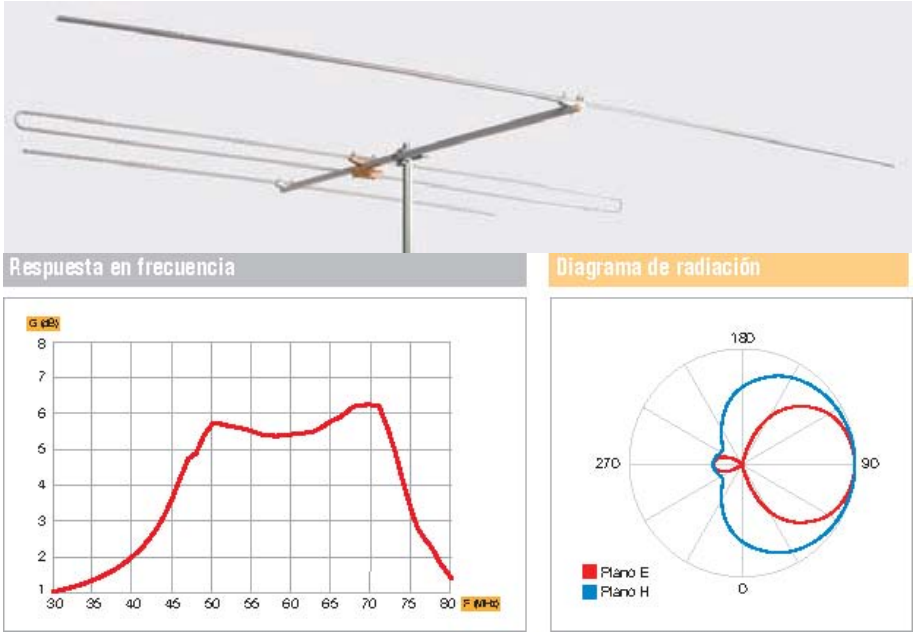

Figura 6

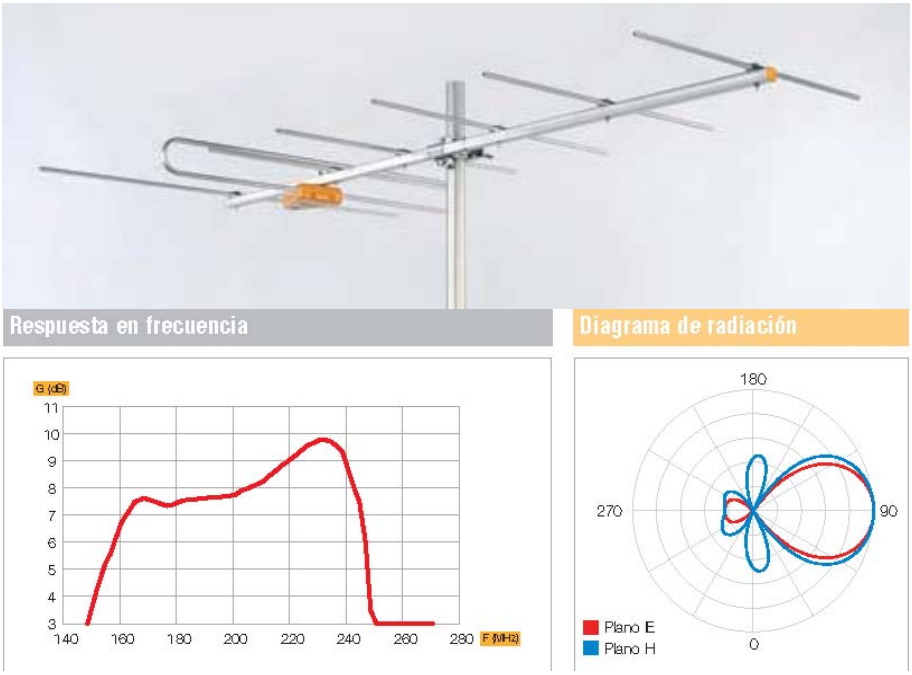

Figura 7

Resistencia de radiación

Consideremos que una antena es alimentada mediante una línea de transmisión y que la intensidad de corriente que circula por sus terminales de entrada es I. Si P_r es la potencia radiada por la antena, la resistencia de radiación R_a se define como la resistencia equivalente que habría que colocar en los bornes de entrada para conseguir que la potencia disipada fuera igual a P_r (ver figura 8).

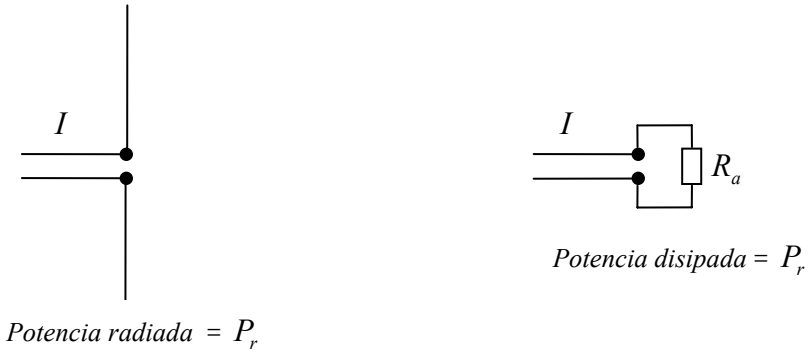

Figura 8

$$\frac{1}{2}|I|^2 R_a = P_r \tag{1.6.11}$$

Nótese que para una intensidad dada la potencia radiada es proporcional a la resistencia de radiación, por tanto, una antena con una resistencia de radiación pequeña radiará poca potencia; su eficiencia y su ganancia serán malas.

Para el dipolo elemental eléctrico se obtiene

$$R_a = \frac{Z_0 k_0^2 (dl)^2}{6\pi} = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda_0}\right)^2 \tag{1.6.12}$$

donde se han usado las relaciones $Z_0 \approx 120\pi\,\Omega$ y $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. Por ejemplo, considérese que la frecuencia de la antena dipolar eléctrica es $1MHz$ y $dl = 1m$, la longitud de onda será $\lambda_0 = 300m$ y, por tanto, la resistencia de radiación es igual a 0.0084Ω, la cual es muy pequeña.

Este ejemplo ilustra un resultado general: la resistencia de radiación de una antena cuyas dimensiones son muy inferiores a la longitud de onda es muy pequeña y, por tanto, es un radiador muy ineficaz. En antenas pequeñas la mayoría de la potencia se disipa debido a las pérdidas óhmicas en vez de ser radiada. Una antena eficiente debe tener unas dimensiones comparables a la longitud de onda. Sin embargo, a pesar de su ineficiencia los dipolos elementales resultan aceptables como antenas receptora si el nivel de señal es suficientemente alto. La limitación en la recepción tiene más que ver con el alto nivel de ruido presente en la atmósfera a bajas frecuencias que con la eficacia de la antena.

Polarización

La potencia captada por una antena depende no sólo de la densidad de potencia de la onda incidente, sino también de la orientación relativa entre el campo y la antena receptora. Por ejemplo, supongamos que una antena de tipo dipolo eléctrico está orientada perpendicularmente al plano de tierra y emite una onda que es recibida por otra antena del mismo tipo. Dado que el campo radiado por la antena emisora oscila en la dirección vertical (tiene polarización vertical), la potencia captada por la antena receptora será máxima si su orientación es vertical y nula si es horizontal.

El ejemplo anterior muestra la importancia que tiene el concepto de polarización en el comportamiento de las antenas en recepción. Por el momento nos conformaremos con

introducir el significado preciso del término polarización. En el tema 6 se hará un estudio detallado de su relación con la potencia que la antena receptora entrega a la carga.

Hemos visto que el campo eléctrico (o magnético) radiado por una antena se expresa en notación fasorial como $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$, en donde $\vec{E}(\vec{r})$ depende sólo de la posición y tiene la forma genérica

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\vec{f}(\theta,\phi) \tag{1.3.17}$$

El término $\vec{f}(\theta,\phi)$ es un vector complejo que expresa la dependencia angular; es el patrón de radiación del campo.

La polarización de una onda electromagnética es la descripción del lugar geométrico recorrido por el vector campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$ (o, en su caso, por el campo magnético) a lo largo del tiempo en un punto dado del espacio. En general, la polarización de una onda es elíptica. No obstante, puede ocurrir que la excentricidad de la elipse sea nula, en cuyo caso tendríamos polarización circular. También puede ocurrir que la elipse degenere en una recta, con lo que tendríamos una onda polarizada linealmente.

En la figura 9 se ha representado el campo eléctrico de una onda en un instante dado. Su proyección sobre un plano dado, *P*, nos daría un vector cuyo recorrido en el transcurso del tiempo sería, en general, una elipse.

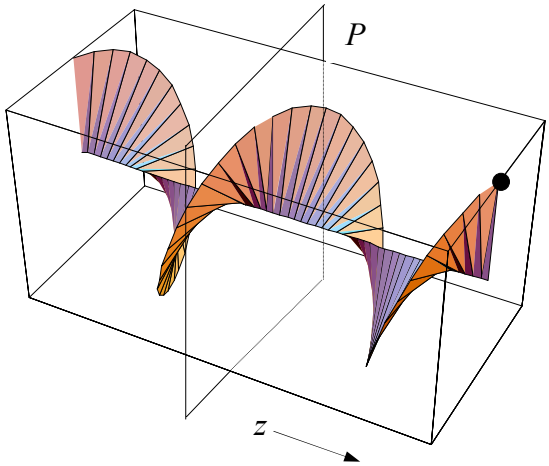

Figura 9

La onda radiada por una antena es diferente en cada dirección espacial y, por tanto, también lo será su polarización. Examinando el vector $\vec{f}(\theta,\phi)$ es posible determinar el tipo de polarización de la onda. Si denominamos $\vec{f}_r(\theta,\phi)$ a la parte real del vector $\vec{f}(\theta,\phi)$ y $\vec{f}_i(\theta,\phi)$ a su parte imaginaria, se demuestra que la polarización de la onda en una dirección determinada por los ángulos θ, ϕ es:

a) lineal, si

$$\vec{f}_r \times \vec{f}_i = 0 \tag{1.6.13}$$

b) circular, si

$$\vec{f}_r \cdot \vec{f}_i = 0 \quad \text{y} \quad \vec{f}_r \cdot \vec{f}_r = \vec{f}_i \cdot \vec{f}_i \tag{1.6.14}$$

Si no se cumplen ninguna de estas condiciones la polarización es elíptica.

Todavía queda por determinar el sentido de giro del vector campo eléctrico en el transcurso del tiempo. Diremos que la polarización es *positiva* o *a derechas* si el campo eléctrico gira en sentido de las agujas del reloj cuando miramos a la onda de manera que la vemos alejarse de nosotros. En caso contrario diremos que la polarización es *negativa* o *a izquierdas*. El sentido de giro se determina según la relación siguiente

$$\begin{aligned} &\text{Polarización positiva}: \ \left(\vec{f}_r \times \vec{f}_i\right)\cdot \vec{n} < 0 \\ &\text{Polarización negativa}: \ \left(\vec{f}_r \times \vec{f}_i\right)\cdot \vec{n} > 0 \end{aligned} \tag{1.6.15}$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario que indica la dirección de propagación de la onda, $\vec{u}_r$ en nuestro caso.

Cualquiera que sea la polarización de una onda siempre será posible descomponerla como suma de dos ondas polarizadas linealmente o dos ondas polarizadas circularmente con sentidos de giro opuestos. Esta descomposición será muy útil a la hora de introducir el concepto de coeficiente de desacoplo de polarización. Así, si $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, son dos vectores reales unitarios cualesquiera perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, tales que $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{n}$, siempre será posible escribir $\vec{f}(\theta,\phi)$ como

$$\vec{f} = \left(\vec{f}\cdot\vec{u}_1\right)\vec{u}_1 + \left(\vec{f}\cdot\vec{u}_2\right)\vec{u}_2 \tag{1.6.16}$$

Haciendo uso de esta expresión podemos descomponer el campo de la onda original $\vec{E}(\vec{r})$ en dos sumandos $\vec{E}_1(\vec{r}) = \dfrac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\left(\vec{f}\cdot\vec{u}_1\right)\vec{u}_1$ y $\vec{E}_2(\vec{r}) = \dfrac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\left(\vec{f}\cdot\vec{u}_2\right)\vec{u}_2$ que representan una onda polarizada linealmente según $\vec{u}_1$ y otra según $\vec{u}_2$, respectivamente. De forma similar también podemos expresar $\vec{f}(\theta,\phi)$ como

$$\vec{f} = \frac{\vec{f}\cdot\vec{u}_1 - j\vec{f}\cdot\vec{u}_2}{2}\left(\vec{u}_1 + j\vec{u}_2\right) + \frac{\vec{f}\cdot\vec{u}_1 + j\vec{f}\cdot\vec{u}_2}{2}\left(\vec{u}_1 - j\vec{u}_2\right) \tag{1.6.17}$$

Los sumandos $\dfrac{\vec{f}\cdot\vec{u}_1 - j\vec{f}\cdot\vec{u}_2}{2}\left(\vec{u}_1 + j\vec{u}_2\right)$ y $\dfrac{\vec{f}\cdot\vec{u}_1 + j\vec{f}\cdot\vec{u}_2}{2}\left(\vec{u}_1 - j\vec{u}_2\right)$ están asociados a ondas con polarización circular positiva y negativa, respectivamente.

Por ejemplo, vimos que el dipolo eléctrico del apartado 5 tenía un patrón de radiación $\vec{f}(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta$, por lo que $\vec{f}_r(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_\theta$ y $\vec{f}_i(\theta,\phi) = 0$ y, por tanto, la polarización de la onda radiada por este dipolo será lineal orientada según $\vec{u}_\theta$.

Área efectiva

Una antena actuando en recepción extrae potencia de la onda incidente, por lo que presenta una cierta área de captación de energía o área efectiva A_e.

En general, no toda la potencia incidente sobre la antena es transferida a la carga. Por un lado parte de esta la potencia es desaprovechada porque las polarizaciones de la onda incidente y de la antena (la de la onda radiada por ella en una dirección dada) no coinciden (desadaptación de polarización). Por otro, parte de la potencia captada por la antena es reflejada y no se transfiere a la carga (desadaptación de la carga). Además, si la eficiencia η es menor que la unidad, parte de la potencia incidente será disipada en forma de calor.

Si consideramos condiciones ideales de adaptación de carga y polarización y eficiencia igual a la unidad, se define área efectiva de una antena como la relación entre la potencia que entrega la antena a la carga, P_L, y la densidad de potencia incidente en la antena.

$$A_e = \frac{P_L}{\mathcal{P}} \tag{1.6.18}$$

En otras palabras, el área efectiva de la antena es la superficie del frente de onda que habría que interceptar para conseguir extraer la potencia, P_L. En general, el área efectiva no coincide con el área física de la antena, si bien en algunos casos guarda una relación directa.

Es posible demostrar que para cualquier antena existe una relación entre el área efectiva y la directividad dada por

$$\frac{A_e}{D} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \tag{1.6.19}$$

Tensiones y corrientes de una antena receptora.

Haciendo uso del teorema de reciprocidad es posible relacionar la tensión y la corriente que se inducen en los bornes de una antena, actuando en recepción, con la corriente que la recorre cuando actúa en transmisión. Consideremos que sobre una antena de hilo, que actúa como receptora, incide una onda cuyo campo eléctrico es $\vec{E}_i$. Entonces, es posible demostrar que la corriente en cortocircuito que circula por sus terminales de alimentación es

$$I_{cc} = \frac{1}{V}\int_{ant} \vec{I} \cdot \vec{E}_i dl \tag{1.6.20}$$

en donde $\vec{I}$ es la corriente que recorre la antena, actuando en transmisión, cuando se le aplica un generador de tensión V.

También se puede probar que la tensión en circuito abierto inducida en esta antena es

$$V_{ca} = \frac{1}{I(0)}\int_{ant} \vec{I} \cdot \vec{E}_i dl \tag{1.6.21}$$

en donde $\vec{I}$ tiene el mismo significado que antes, e $I(0)$ es la corriente en sus terminales de alimentación.