Tema I : Funciones reales de variable real. Límites y continuidad

1. La recta real : intervalos y entornos.

2. Funciones reales de variable real.

3. Funciones elementales y sus gráficas.

4. Límites de funciones reales de variable real.

5. Continuidad. Teoremas fundamentales.

1.LA RECTA REAL.INTERVALOS Y ENTORNOS:

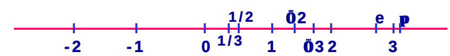
N ={0,1,2,3,...}

Z ={0,±1, ±2, ±3,...}

Q ={a/b / a,bÎZ, b¹0}

IRRACIONALES:Ö2,Ö3, p,e,...

R= Q È IRR.



•**Intervalos finitos o segmentos:** dados a,bÎR.
[a,b]={xÎR /a £ x £ b} (a,b)={xÎR /a < x < b}
(a,b]={xÎR /a < x £ b} [a,b)={xÎR /a £ x < b}

•**Intervalos no finitos o semirrectas:** dado aÎR,
con origen en a,
[a,+¥)={xÎR / x³a} (a,+¥)={xÎR / x>a}
con extremo en a,
(-¥,a]={xÎR / x£a} (-¥,a)={xÎR / x<a}
R^+=(0,+¥) R_0^+=[0,+¥) R^-=(-¥,0) R_0^-=(-¥,0]

•**Conjuntos abiertos:** intervalos abiertos y uniones de los mismos.

•**Entorno de un punto:** dados aÎR, e > 0, se define el entorno de centro a y radio e como el intervalo: (a - e, a + e).

Se verifica que:
xÎ(a - e, a + e) Û a - e < x <a + e Û
-e < x-a <e Û |x-a|< e.

•**Entorno a la derecha:** (a, a + e).

•**Entorno a la izquierda:** (a - e, a).

2.FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL:

•**DEFINICIÓN:**

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer conjunto uno y sólo uno del segundo conjunto.

f: A ® B, xÎA, y=f(x)ÎB,

cuando A,B Í R, función real de variable real.

DEFINICIONES:

•El dominio de una función es el conjunto de puntos en los que tiene sentido su expresión matemática.
Dom(f)= {xÎR / $ yÎR, con y=f(x)}

•La imagen o recorrido de una función es el conjunto de imágenes de puntos del dominio.
Img(f)= {yÎR / $ xÎA, con y=f(x)}

•La gráfica de una función es la curva del plano dada por los pares (x,f(x)).
Gra(f)= {(x,f(x))Î R ´ R = R² / xÎA}

OPERACIONES CON FUNCIONES: $f,g: A \to \mathbb{R}$

- **Suma**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in A$.
- **Producto por una constante**: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in A$, dada $c \in \mathbb{R}$.
- **Producto**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in A$.
- **Cociente**: $(f/g)(x) = f(x)/g(x), \ \forall x \in A \,/\, g(x) \neq 0$

OPERACIONES CON FUNCIONES:

- **Composición**: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$, $g \circ f: A \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in A$.
- **Función inversa**: $f: A \to B$, $f^{-1}: B \to A$, tal que
  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, \ \forall x \in A$,
  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y, \ \forall y \in B$.

☛ Las gráficas de $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a $y=x$.

DEFINICIONES (MONOTONÍA): $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f es monótona creciente en A si y sólo si, $\forall x,y \in A$ con $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. (Si $f(x) < f(y)$, se dirá que f es estrictamente creciente.)
- f es monótona decreciente en A si y sólo si, $\forall x,y \in A$ con $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. (Si $f(x) > f(y)$, se dirá que f es estrictamente decreciente.)
- f se dice monótona en A si lo es creciente o decreciente, y estrictamente monótona cuando es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

DEFINICIONES (ACOTACIÓN): $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f es acotada superiormente en A si y sólo si, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M, \forall x \in A$.
- f es acotada inferiormente en A si y sólo si, $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x), \forall x \in A$.
- f es acotada en A si y sólo si lo es superior e inferiormente.

DEFINICIONES (EXTREMOS GLOBALES O ABSOLUTOS): $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f tiene máximo global o absoluto en A $\Leftrightarrow$ $\exists \, x_M \in A$ tal que $f(x) \leq f(x_M), \forall x \in A$.
- x_M es el punto donde se alcanza el máximo (no tiene por qué ser único).
- $f(x_M)$ valor máximo (¡único!).

f tiene mínimo global o absoluto en A $\Leftrightarrow$ $\exists \, x_m \in A$ tal que $f(x_m) \leq f(x), \forall x \in A$.
x_m es el punto donde se alcanza el mínimo (no tiene por qué ser único).
$f(x_m)$ es valor mínimo (¡único!).

DEFINICIONES (EXTREMOS LOCALES O RELATIVOS): $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f tiene un máximo local o relativo en un punto $x_0 \in A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
- f tiene un mínimo local o relativo en un punto $x_0 \in A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

GLOBAL $\Rightarrow$ LOCAL
¡NO AL REVÉS!

DEFINICIONES (CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD):
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f es convexa $\Leftrightarrow$ el segmento que une dos puntos cualesquiera de su gráfica queda por encima de la misma (si queda estrictamente por encima de la gráfica, se dirá que es estrictamente convexa).
- f es cóncava $\Leftrightarrow$ el segmento que une dos puntos cualesquiera de su gráfica queda por debajo de la misma (si queda estrictamente por debajo de la gráfica, se dirá que es estrictamente cóncava).

f es convexa $\Leftrightarrow$ -f es cóncava.

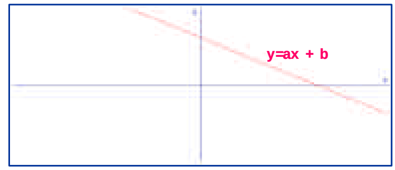
3. FUNCIONES ELEMENTALES Y SUS GRÁFICAS.

I. Funciones polinómicas.

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,
$n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. $Dom(f)=\mathbb{R}$.

I(a). Función polinómicas de grado 1 (lineal).

$f(x)=ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. $Dom(f)=\mathbb{R}$. Su gráfica es una recta.



☛ donde:

- a es la pendiente de la recta (tangente del ángulo que forma con la parte positiva del eje OX).
- $a>0$ función creciente; $a<0$ función decreciente
- $a=0$ recta horizontal ($y=b$). ¿recta vertical?
- b es la ordenada en el origen ($(0,b)$ es el punto de corte con el eje OY).
- $b=0$ la recta $y=ax$ pasa por $(0,0)$. $a=b=0$ $y=0$

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, la distancia que la separa es $|b-b'|$.

Ecuación de la recta:

- forma explícita:
  $y=ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. (1)
  ➜ relación de paralelismo: $a=a'$
- forma implícita:
  $Ax + By + C=0$, $A,B,C \in \mathbb{R}$. (2)
- Para $B \neq 0$, es $y=(-A/B)x-C/B \Rightarrow a=-A/B$
  ➜ relación de paralelismo: $A/A'=B/B'$.
- Para $B=0 \Rightarrow$ recta vertical ($x=-C/A$).

- forma punto-pendiente: $\begin{cases} \text{punto } (x_0, y_0) \\ \text{pendiente 'a'} \end{cases}$

$$\Rightarrow y- y_0 = a(x- x_0) \quad (3)$$

- que pasa por dos puntos: $\begin{cases} (x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \end{cases}$

$$\Rightarrow (x- x_0)/(x_1- x_0) = (y- y_0)/(y_1- y_0) \quad (4)$$

con pendiente $a= (y_1- y_0)/ (x_1- x_0)$.

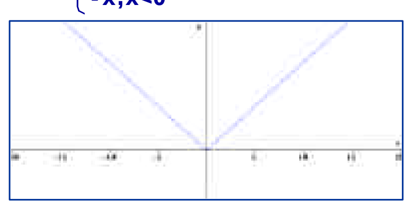
APLICACIONES:

Funciones de oferta y demanda (ej.14).

$q_d= b - ap$, $a,b>0$,
$q_s= c + dp$, $c,d>0$.

Función valor absoluto.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$



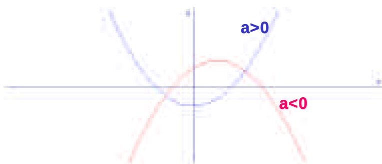
I(b).Función polinómica de grado 2 (cuadrática).

$f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. $Dom(f)=\mathbb{R}$.

Su gráfica es una <u>parábola</u>, donde:

•$a>0$ es estrictamente convexa con mínimo global en $x=-b/2a$.

•$a<0$ es estrictamente cóncava con máximo global en $x=-b/2a$.



• $x=-b/2a$ es el eje de simetría de la parábola.

• El mayor o menor valor de 'a' indica la menor o mayor separación entre las ramas de la parábola.

• $x=0 \Rightarrow f(0)=c \Rightarrow$ punto $(0,c)$.

• $0=f(x)=ax^2+bx+c \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, si

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta<0, \text{ no corta al eje.} \\ \Delta=0, \text{ raíz doble, es tangente al eje.} \\ \Delta>0, \text{ dos raíces, corta en dos puntos.} \end{cases}$$

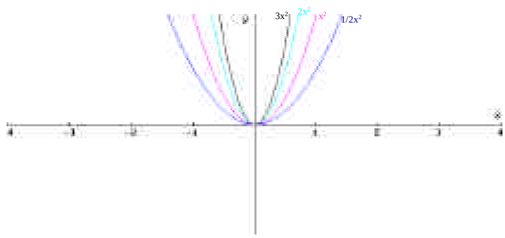
Casos particulares:

$b=0$, $y=ax^2+c$ simétrica respecto de OY.

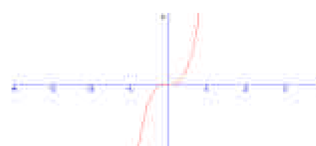
$c=0$, $y=ax^2+bx$ pasa por $(0,0)$.

$b=c=0$, $y=ax^2$, ambas situaciones.

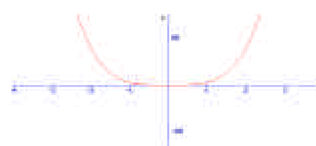
Algunas gráficas:



I(c).Función polinómica de grado 3 (cúbica). Ej.: $y=x^3$.



I(d).Función polinómica de grado 4. Ej.: $y=x^4$.



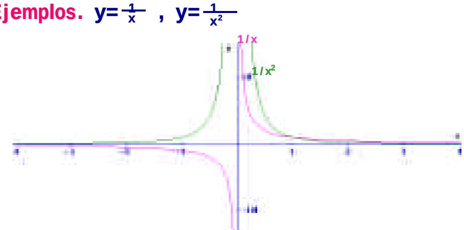
II.Funciones racionales.

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

$n,m\in\mathbb{N}$, $a_n,\ldots,a_0$ $b_m,\ldots,b_0\in\mathbb{R}$.

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{$raíces de $q(x)\}$.

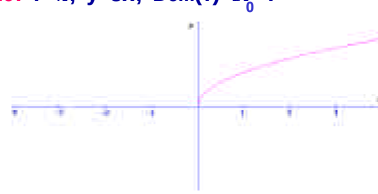
Ejemplos. $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$



III.Funciones potenciales. $y=f(x)=x^r$, puede ser

- $r\in\mathbb{Z}$ (polinómicas y racionales)
- $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $y=\sqrt[q]{x^p}$, el dominio depende de 'p' y 'q'.

Ejemplo. $r=½$, $y=\sqrt{x}$, $Dom(f)=\mathbb{R}^+_0$.



Propiedades:

1) $a^{n+m}=a^n\cdot a^m$ 2) $a^{n-m}=a^n/a^m$ 3) $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$

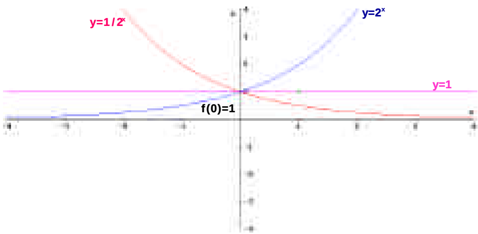
4) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ 5) $(a/b)^n=a^n/b^n$ 6) $a^{-n}=1/a^n$

IV. Funciones exponenciales. $y=f(x)=a^x$, $a>0$.

$f(0)=1$, $Dom(f)=\mathbb{R}$, $Img(f)=\mathbb{R}^+$.

$0<a<1$, estrictamente decreciente, $a=1$, constante

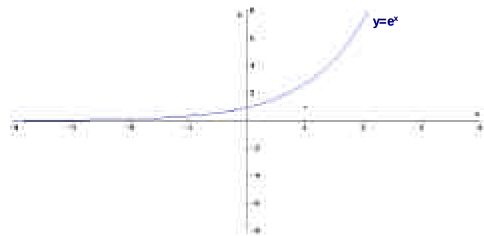
$a>1$, estrictamente creciente.



➡ exponencial natural: $y=f(x)=e^x$, para

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828...$$

Modelos exponenciales: $f(x)=Ce^{kx}$, $C,k \in \mathbb{R}$.

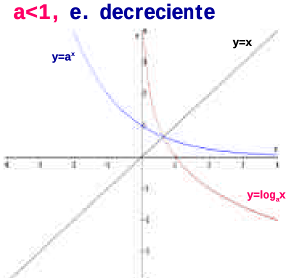


V. Funciones logarítmicas (inversas de exponenciales).

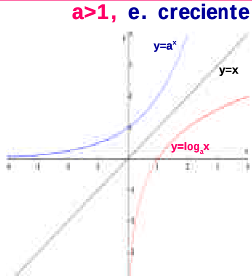
$y=f(x)=\log_a x \Leftrightarrow a^y = a^{\log_a x} = x$, $a>0$, $a\neq 1$, $f(1)=0$.

$Dom(f)=\mathbb{R}^+$, $Img(f)=\mathbb{R}$

$a<1$, e. decreciente



$a>1$, e. creciente



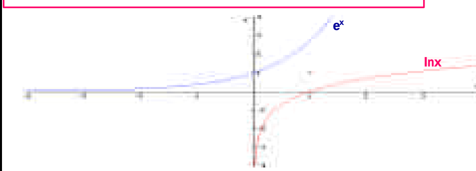
Propiedades:

1) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
2) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
3) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Función logaritmo neperiano:

$y = \log_e x = \ln x = Lx = \log x$

Se verifica: $a^x = e^{x\ln a}$ $\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$



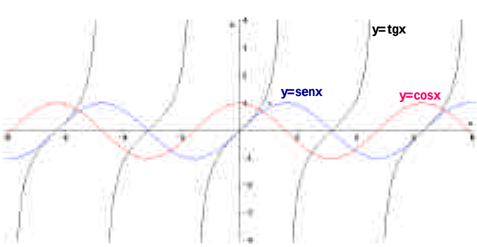
VI. Funciones trigonométricas.

$y=f(x)=\operatorname{sen}x$, $Dom(f)=\mathbb{R}$, $y=f(x)=\cos x$, $Dom(f)=\mathbb{R}$,

$y=f(x)=\operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$, $Dom(f)=\mathbb{R}$-{raíces de $\cos x$}.

Son funciones periódicas de periodo 2π, y se verifica:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.



4. LÍMITES DE FUNCIONES.

DEFINICIÓN: $f: A \to \mathbb{R}$, x_0, $L \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0 sii $f(x)$ está próximo a L para valores de x próximos a x_0 y distintos de x_0.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

El límite de una función en un punto, si existe, es único.

• $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow f(x)$ está próximo a L para valores de x próximos a x_0 y mayores que x_0.

• $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow f(x)$ está próximo a L para valores de x próximos a x_0 y menores que x_0.

CRITERIO DE EXISTENCIA DE LÍMITE

$lím$_{x®x_0}$ f(x)=L Û { $lím$_{x®x_0^+}$ f(x)=L_1 ; $lím$_{x®x_0^-}$ f(x)=L_2 } ,y se verifica, L_1 = L_2 = L.

EXTENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE.

DEF.1(LÍMITE INFINITO). lím$_{x®x_0}$ f(x) =+¥ (- ¥) sii f crece (decrece) indefinidamente para valores de x próximos a x_0.

DEF.2(LÍMITE EN EL INFINITO). lím$_{x®±¥}$ f(x) = L sii f(x) está próximo a L para valores de x cada vez mayores (o menores).

DEF.3(LÍMITE INFINITO EN EL INFINITO). lím$_{x®±¥}$ f(x) =+¥ (- ¥) sii f crece (decrece) indefinidamente para valores de x cada vez mayores (o menores).

OPERACIONES CON LÍMITES.

I. SUMA. f,g: A ® R, lím$_{x®x_0}$ f(x)=L; lím$_{x®x_0}$ g(x)=M (puede ser x_0=±¥).

I(a). L,MÎR (finitos) Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)+g(x)) = L+M.

I(b). L = ±¥, MÎR (finito), o al revés Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)+g(x))= ±¥.

I(c). L, M = ±¥, ¡mismo signo! Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)+g(x))= ±¥.

Si, L = ±¥, M =-¥ ¡distinto signo! Þ INDETERMINACIÓN DEL TIPO ¥ - ¥

OPERACIONES CON LÍMITES.

II. PRODUCTO. f,g: A ® R, lím$_{x®x_0}$ f(x)=L y lím$_{x®x_0}$ g(x)=M (puede ser x_0=±¥).

II(a). L,MÎR (finitos) Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)×g(x)) = L×M.

II(b). L = ±¥, MÎR, M¹0 (finito), o al revés Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)×g(x))= ±¥ (según signos).

II(c). L, M = ±¥, ¡aún con distinto signo! Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)×g(x))= ±¥ (según signos).

Si, L = ±¥, M = 0, o al revés Þ INDETERMINACIÓN DEL TIPO 0 × ¥

OPERACIONES CON LÍMITES.

III. COCIENTE. f,g: A ® R, con g(x)¹0, "xÎA lím$_{x®x_0}$ f(x)=L y lím$_{x®x_0}$ g(x)=M (puede ser x_0=±¥).

III(a). L, MÎR, M¹0 (finitos) Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)/g(x)) = L/M.

III(b). L = ±¥, MÎR (finito), incluso M=0 Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)/g(x))= ±¥ (según signos).

III(c). LÎR (finito), incluso L=0, M = ±¥ Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)/g(x))=0.

III(d). LÎR (finito), L¹0, M=0 Þ lim$_{x®x_0}$(f(x)/g(x))= ±¥ (según signos).

- Si, L=±¥, M=±¥ Þ INDETERM. DEL TIPO ¥/¥
- Si, L=0, M=0 Þ INDETERM. DEL TIPO 0/0

APLICACIÓN:ASÍNTOTAS f: A ® R

DEF.1(Asíntota vertical) La recta x=x_0 es una asíntota vertical de f(x) Û lím$_{x®x_0}$ f(x) =¥.

*Posición: estudio de lím.laterales y signo del límite (±¥)

DEF.2(Asíntota horizontal) La recta y=L es una asíntota horizontal de f(x) Û lím$_{x®±¥}$ f(x) =L.

*Posición: comportamiento en ±¥ y signo del límite de f(x)-L (0±).

DEF.3(Asíntota oblícua) La recta y=ax+b es una asíntota oblícua de f(x) Û lím$_{x®±¥}$ $\frac{f(x)}{x}$ =a, y b=lím$_{x®±¥}$(f(x)-ax).

*Posición: comportamiento en ±¥ y signo del límite de f(x)-(ax+b) (0±).

5.CONTINUIDAD.TEOREMAS FUNDAMENTALES.

DEF1.(Continuidad) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

En caso contrario, f se dice discontinua en x_0

- f es continua a la derecha en $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.
- f es continua a la izquierda en $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

f es continua en x_0 $\Leftrightarrow$ lo es a la izqda. y a la dcha.

- f es continua en $A \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$ lo es $\forall x \in A$.
- f es continua en $[a,b] \Leftrightarrow$ lo es en (a,b), por la dcha. en a y por la izqda. en b.

PROPIEDADES.

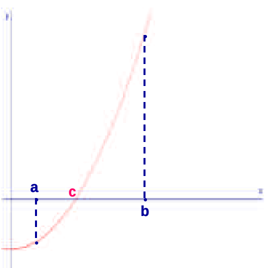
I. $f,g: A \to \mathbb{R}$, continuas en $x_0 \in A$, entonces
I(a). $f + g$ es continua en x_0.
I(b). $c \cdot f$ es continua en x_0, dada $c \in \mathbb{R}$.
I(c). $f \cdot g$ es continua en x_0.
I(d). Si $g(x_0) \neq 0$, f/g es continua en x_0.

II. Si f es continua en x_0 y g lo es en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

III. Si f es continua en x_0 y $\exists f^{-1}$ entonces f^{-1} es continua en $f(x_0)$.

TEOREMA DE BOLZANO.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua tal que $f(a)\cdot f(b) < 0$, $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.



Observaciones:
1) La raíz no tiene por qué ser única.
2) Las hipótesis de continuidad y cambio de signo son fundamentales.
3) Para aplicar el teorema a funciones no definidas en un [a,b], hay que buscar el cambio de signo.

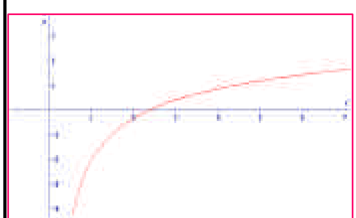
APLICACIÓN: MÉTODO DE LA BISECCIÓN.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua: $f(a)\cdot f(b)<0$

$x_0=a$, $x_1=b \Rightarrow x_2=(a+b)/2$,

$$\begin{cases} \text{si } f(x_2)=0 \Rightarrow \text{es la raíz buscada.} \\ \text{si } f(x_0)\cdot f(x_2)<0 \text{ se elige } [x_0,x_2] \Rightarrow x_3=(x_0+x_2)/2,\ldots \\ \text{si } f(x_1)\cdot f(x_2)<0 \text{ se elige } [x_2,x_1] \Rightarrow x_3=(x_1+x_2)/2,\ldots \end{cases}$$

- **Ejemplo.** $f(x)=\ln x-2/x$, continua $\forall x>0$: $f(1)=-2$, $f(e)>0$.



$x_0=1$, $x_1=e \Rightarrow$
$x_2=(1+e)/2 \approx 1.85$, con $f(x_2) \approx -0.45<0 \Rightarrow$
$x_3=(x_1+x_2)/2 \approx 2.28$, con $f(x_3) \approx -0.04<0 \Rightarrow$
$x_4=(x_1+x_3)/2 \approx 2.5$, con $f(x_4) \approx 0.11>0 \Rightarrow$
$x_5=(x_4+x_3)/2 \approx 2.39$, con $f(x_5) \approx 0.03>0 \Rightarrow \ldots$

TEOREMA DE WEIERSTRASS.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua $\Rightarrow$ f alcanza en [a,b] el máximo y el mínimo absolutos.

➡ Toda función continua en [a,b] es acotada.