

***TEMA 7***

***VARIABLES ALEATORIAS Y***

***DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD***

## 1. Variables Aleatorias.

En muchos experimentos aleatorios los resultados no son intrínsecamente numéricos; el número resulta de aplicar un *instrumento de medida* (función) al objeto observado.

Una **variable aleatoria** es una función que a cada suceso elemental de un espacio muestral le asigna un número.

### Ejemplos:

- Se elige al azar una montaña de un mapa y se mide su altura:

$$X\left(\text{Montaña}\right) \longrightarrow 3.714 \text{ m.}$$

- Se elige al azar un pez entre todos los de una captura y se mide su longitud:

$$X\left(\text{Pez}\right) \longrightarrow 2,24 \text{ m.}$$

- Se pide a una persona elegida al azar que corra lo más rápido posible y se mide lo que tarda en recorrer 100 m.:

$$X\left(\text{Corredor}\right) \longrightarrow 32 \text{ seg.}$$

- Se lanzan dos dados y se mide cuánto vale la suma de sus caras superiores:

$$X\left(\text{Dados}\right) \longrightarrow 10$$

### Definición de variable aleatoria.

Formalmente, dado un experimento aleatorio cuyo espacio muestral asociado es  $E$ , si denotamos por  $\omega$  a los sucesos elementales de este espacio, una **variable aleatoria** definida sobre  $E$  es una función:

$$\begin{array}{l} X: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \in E \longmapsto X(\omega) = r \in \mathbb{R} \end{array}$$

que cumple, además que para todo valor  $x$  real el conjunto:

$$\left\{ \omega \in E / X(\omega) \leq x \right\}$$

es un suceso de  $E$ .

Puesto que el experimento cuyo resultado se está midiendo con  $X$  es aleatorio, el valor de  $X$  también será aleatorio (no es posible conocerlo hasta que se lleve a cabo efectivamente el experimento). Por tanto, cada posible valor de  $X$  tendrá asignada una determinada probabilidad. En particular, dado que el conjunto

$$\left\{ \omega \in E / X(\omega) \leq x \right\}$$

es un suceso de  $E$ , tendrá asignada una cierta probabilidad, que por simplicidad se denotará como:

$$P(X \leq x) = P\left(\left\{ \omega \in E / X(\omega) \leq x \right\}\right)$$

**Ejemplo 1:**

Sea el experimento “Tirar un dado”. El espacio muestral es entonces:

$$E = \left\{ \begin{array}{c} \text{1 punto} \\ \text{2 puntos} \\ \text{3 puntos} \\ \text{4 puntos} \\ \text{5 puntos} \\ \text{6 puntos} \end{array} \right\}$$

Los valores correspondientes a la variable aleatoria “Resultado obtenido” serían:

$$X(\text{1 punto}) = 1; \quad X(\text{2 puntos}) = 2; \quad X(\text{3 puntos}) = 3;$$

$$X(\text{4 puntos}) = 4; \quad X(\text{5 puntos}) = 5; \quad X(\text{6 puntos}) = 6;$$

y sus correspondientes probabilidades:

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 5) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Obsérvese que para cualquier valor  $x$  real tiene sentido calcular  $P(X \leq x) = P\left(\left\{\omega \in E / X(\omega) \leq x\right\}\right)$ :

$$P(X \leq 1) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(X \leq 3,67) = P(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{6}$$

$$P(X \leq -4) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X \leq 867) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$$

**Ejemplo 2:**

Sea el experimento aleatorio “Tirar dos dados”. El espacio muestral resultante es ahora:

$$E = \left\{ \begin{array}{lll} \left( \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{1} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{2} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{3} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{3} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{3} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{4} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{5} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{5} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{5} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{6} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{6} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{6} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{3} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{3} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{5} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{5} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{6} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{5} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{6} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{6} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{3} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{3} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{4} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{3} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{5} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{5} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{6} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{5} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{6} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{6} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{3} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{2} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{3} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{4} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{3} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{5} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{4} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{5} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{6} \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Si sobre este espacio medimos la variable  $X =$  "Suma de los dos dados" obtenemos:

|                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $X(\text{1 verde, 1 naranja})=2$    | $X(\text{2 verdes, 1 naranja})=3$   | $X(\text{3 verdes, 1 naranja})=4$   |
| $X(\text{1 verde, 2 naranjas})=3$   | $X(\text{2 verdes, 2 naranjas})=4$  | $X(\text{3 verdes, 2 naranjas})=5$  |
| $X(\text{1 verde, 3 naranjas})=4$   | $X(\text{2 verdes, 3 naranjas})=5$  | $X(\text{3 verdes, 3 naranjas})=6$  |
| $X(\text{1 verde, 4 naranjas})=5$   | $X(\text{2 verdes, 4 naranjas})=6$  | $X(\text{3 verdes, 4 naranjas})=7$  |
| $X(\text{1 verde, 5 naranjas})=6$   | $X(\text{2 verdes, 5 naranjas})=7$  | $X(\text{3 verdes, 5 naranjas})=8$  |
| $X(\text{1 verde, 6 naranjas})=7$   | $X(\text{2 verdes, 6 naranjas})=8$  | $X(\text{3 verdes, 6 naranjas})=9$  |
| $X(\text{2 verdes, 1 naranja})=5$   | $X(\text{3 verdes, 1 naranja})=6$   | $X(\text{4 verdes, 1 naranja})=7$   |
| $X(\text{2 verdes, 2 naranjas})=6$  | $X(\text{3 verdes, 2 naranjas})=7$  | $X(\text{4 verdes, 2 naranjas})=8$  |
| $X(\text{2 verdes, 3 naranjas})=7$  | $X(\text{3 verdes, 3 naranjas})=8$  | $X(\text{4 verdes, 3 naranjas})=9$  |
| $X(\text{2 verdes, 4 naranjas})=8$  | $X(\text{3 verdes, 4 naranjas})=9$  | $X(\text{4 verdes, 4 naranjas})=10$ |
| $X(\text{2 verdes, 5 naranjas})=9$  | $X(\text{3 verdes, 5 naranjas})=10$ | $X(\text{4 verdes, 5 naranjas})=11$ |
| $X(\text{2 verdes, 6 naranjas})=10$ | $X(\text{3 verdes, 6 naranjas})=11$ | $X(\text{4 verdes, 6 naranjas})=12$ |

El espacio muestral contiene 36 elementos (todas las posibles parejas de resultados). Si los dos dados están bien contruidos no hay razón para pensar que una pareja de valores sea más probable que otra. Por tanto, aplicando la regla de Laplace, cada pareja de valores tiene probabilidad  $\frac{1}{36}$ .

Ahora bien, la variable aleatoria  $X$  sólo puede tomar 11 valores (los números del 2 al 12). La probabilidad de que  $X$  tome el valor concreto  $k$ , entre 2 y 12, es entonces la probabilidad del conjunto de parejas de valores que suman  $k$ :

$$P(X = k) = P\left\{\omega / X(\omega) = k\right\} = P\left\{(a,b) / 1 \leq a \leq 6; 1 \leq b \leq 6; a + b = k\right\},$$

esto es:

$$P(X = 2) = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36} = 0,027$$

$$P(X = 3) = P\{(1,2), (2,1)\} = \frac{2}{36} = 0,055$$

$$P(X = 4) = P\{(1,3), (3,1), (2,2)\} = \frac{3}{36} = 0,083$$

$$P(X = 5) = P\{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} = \frac{4}{36} = 0,111$$

$$P(X = 6) = P\{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\} = \frac{5}{36} = 0,138$$

$$P(X = 7) = P\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} = \frac{6}{36} = 0,166$$

$$P(X = 8) = P\{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} = \frac{5}{36} = 0,138$$

$$P(X = 9) = P\{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\} = \frac{4}{36} = 0,111$$

$$P(X = 10) = P\{(4,6), (6,4), (5,5)\} = \frac{3}{36} = 0,083$$

$$P(X = 11) = P\{(5,6), (6,5)\} = \frac{2}{36} = 0,055$$

$$P(X = 12) = P\{(6,6)\} = \frac{1}{36} = 0,027$$

Nótese que en este caso los distintos valores que toma  $X$  no son equiprobables.

## 1.1. Variables Aleatorias Discretas.

Son aquéllas que toman un  $n^{\circ}$  finito o numerable de valores.

### Ejemplos:

- $X =$  "Resultado de lanzar un dado"

$$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

- $Y =$  "Resultado de aplicar un tratamiento a un enfermo y observar si se cura (1) o no se cura (0)".

$$Y \in \{1,0\}$$

- $U =$  "Número de tornillos defectuosos fabricados por una máquina"

$$U \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

### Función de probabilidad

Dada una variable aleatoria discreta  $X$ , se define su función de probabilidad como la función que a cada valor  $x$  le asigna su probabilidad de ocurrencia:

$$f(x) = P(X = x)$$

Si llamamos  $M$  al conjunto de todos los valores que puede tomar  $X$ , es evidente que esta función cumple las siguientes propiedades:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x$$

$$\sum_{x \in M} f(x) = 1$$



**Ejemplo 1:**

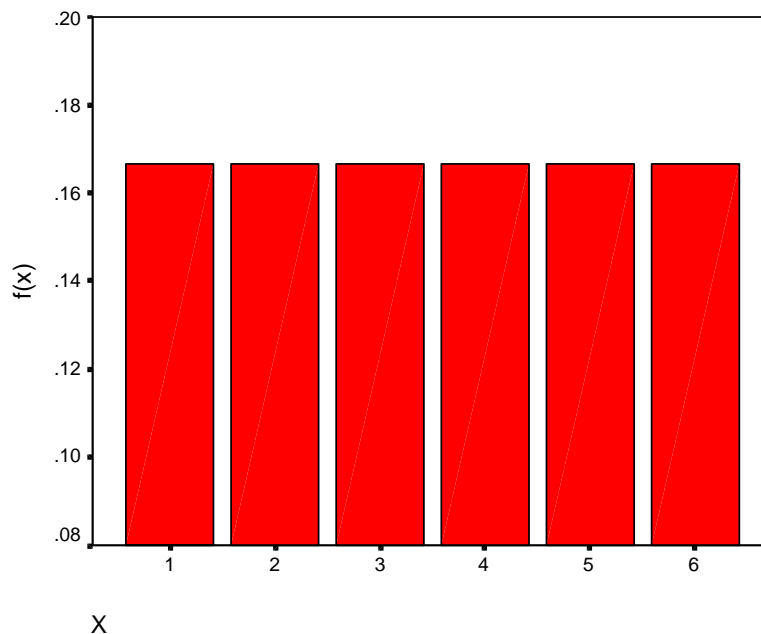
Si  $X$  es el resultado que se observa al tirar un dado, su función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \forall x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos expresar esta función en forma de tabla:

|        |               |               |               |               |               |               |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $X$    | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $f(x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

o gráficamente:



**Ejemplo 2:**

Si en cierta población de insectos el 30% son machos y el 70% hembras, y se elige al azar un insecto, siendo:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si el insecto es hembra} \\ 1 & \text{si el insecto es macho} \end{cases}$$

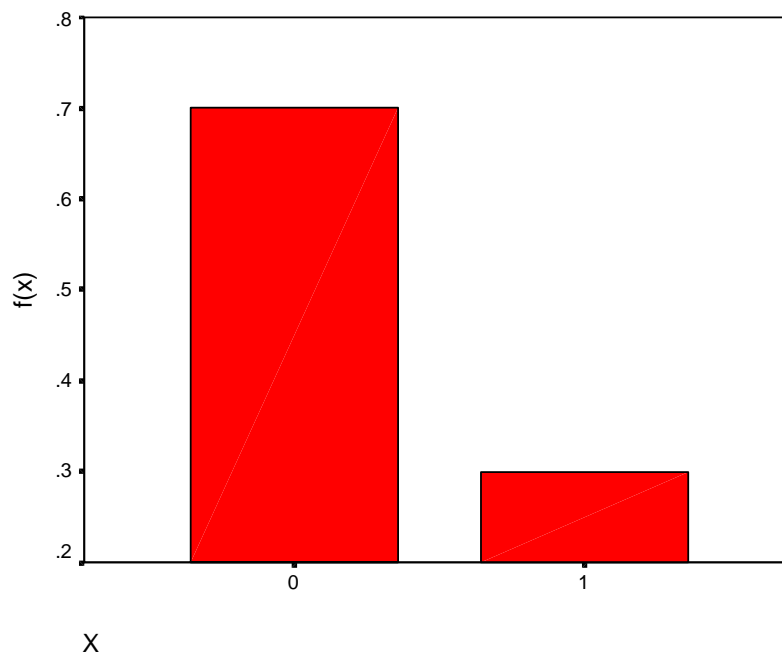
entonces la función de probabilidad de  $X$  es:

$$f(x) = \begin{cases} 0,7 & \text{si } x = 0 \\ 0,3 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En forma de tabla:

|        |     |     |
|--------|-----|-----|
| $x$    | 0   | 1   |
| $f(x)$ | 0.7 | 0.3 |

y en forma gráfica:



## **Función de distribución de probabilidad**

Otra forma de describir la asignación de probabilidades a los distintos valores que puede tomar una variable aleatoria discreta  $X$  es a través de su función de distribución, definida como:

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\left\{\omega \in E / X(\omega) \leq x\right\}\right)$$

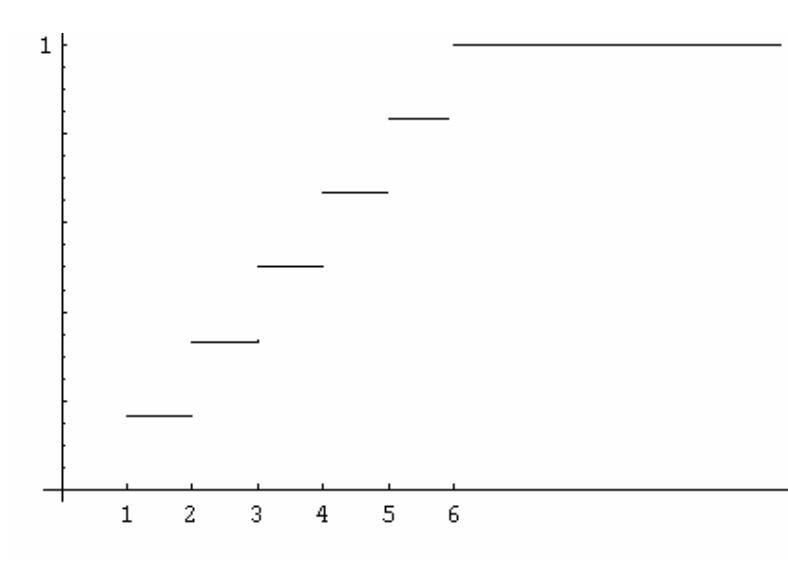
De esta forma,  $F(x)$  es la probabilidad acumulada por todos los sucesos que dan lugar a valores de  $X$  que son menores o iguales que  $x$ . Recuérdese que para que una variable aleatoria esté bien definida debe ocurrir que el conjunto  $\left\{\omega \in E / X(\omega) \leq x\right\}$  sea un suceso de  $E$  y por tanto tenga asignada una probabilidad; ello significa que la función de distribución de una variable aleatoria discreta siempre existe y está definida para todo valor  $x$  real.

### **Ejemplo:**

Si  $X$  es el resultado que se observa al tirar un dado, su función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Gráficamente:



Como vemos,  $F(x)$  está definida sobre todo  $\mathbb{R}$ :

$$F(2) = P(X \leq 2) = \frac{2}{6}$$

$$F(4, 7) = P(X \leq 4, 7) = \frac{4}{6}$$

$$F(6, 2) = P(X \leq 6, 2) = 1$$

$$F(-8, 9) = P(X \leq -8, 9) = 0$$

## **Algunas propiedades de la función de distribución de una v.a. discreta:**

Es fácil observar que se cumplen las siguientes propiedades:

- $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$  (Evidente, pues  $F(x)$  es una probabilidad)

- $F(k) = \sum_{j \leq k} f(j)$

$$(pues F(k) = P(X \leq k) = \sum_{j \leq k} P(X = j) = \sum_{j \leq k} f(j))$$

- $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 1; \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} F(k) = 0$

- $f(k) = F(k) - F(k - 1)$

- $F(x)$  es no decreciente; además  $F(x)$  es una función escalonada, cuyos saltos (escalones) se producen en los valores  $k$  tales que  $f(k) > 0$ .

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

## 1.2. Variables Aleatorias Continuas.

Son aquéllas que toman un valores en un rango continuo.

### Ejemplos:

- $X =$  "Longitud (en cm.) de un pez elegido al azar entre los de una captura"

$$X \in [5, 300]$$

- $Y =$  "Resultado de medir la proporción (en %) de alcohol en un recipiente con fruta en fermentación"

$$Y \in [0, 100]$$

- $U =$  "Distancia al centro de la diana medida desde la posición en que cae un dardo lanzado por un tirador experto"

$$U \in [0, r] \quad (r \text{ es el radio de la diana})$$

### **Observación importante:**

Dado que en cualquier intervalo continuo (aunque sea finito) hay un número infinito de valores, la probabilidad de que una variable aleatoria continua  $X$  definida sobre ese intervalo<sup>1</sup> tome un valor arbitrario  $x$  prefijado de antemano es siempre 0:

$$P(X = x) = 0 \quad \forall x$$



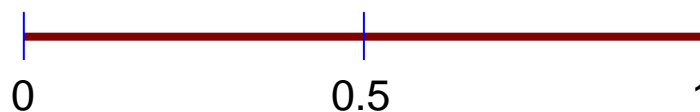
**En el caso de variables aleatorias continuas no es posible definir la función de probabilidad del mismo modo que en el caso discreto**

<sup>1</sup> Se entiende que nos referimos a variables que, a priori, puedan tomar cualquier valor del intervalo, y no concentren su probabilidad en un número finito de valores del mismo.

No obstante, aunque cada valor individual  $x$  tenga una probabilidad 0 de ocurrir, es evidente que algunos rangos continuos de valores (esto es, intervalos de la forma  $[a,b]$ ) han de tener asignada una probabilidad no nula. A modo de ejemplo, si  $a$  y  $b$  son, respectivamente, los valores mínimo y máximo que puede tomar la variable  $X$ , se tiene que  $P(X \in [a,b]) = 1$ .

### Ejemplo 1:

Disponemos de una cuerda de 1 metro de longitud y realizamos el experimento de tirar de sus extremos hasta que la cuerda se parta. Supongamos que la densidad del material con que está hecha la cuerda es completamente uniforme, de forma que a priori es igualmente probable que se rompa en cualquier punto:



Sea  $X =$  "Posición del punto en que se parte la cuerda".

Obviamente, dado que existen infinitos puntos entre 0 y 1 en los que la cuerda puede romperse, la probabilidad de que se rompa en un punto  $x$  concreto es 0 cualquiera que sea  $x$ :

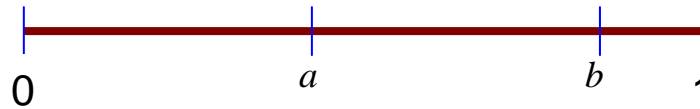
$$P(X = x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Ahora bien, dado que *efectivamente* la cuerda ha de romperse en algún punto, y todos son equiprobables, podemos aplicar la regla de Laplace para calcular, por ejemplo, la probabilidad de que la cuerda se parta en algún punto de la mitad izquierda:

$$P(X \in [0,0.5]) = \frac{\text{Medida del trozo } [0,0.5]}{\text{Medida de la cuerda}} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

La probabilidad de que la cuerda se parta en algún punto de un intervalo arbitrario  $[a,b]$  será, también por la regla de Laplace:

$$P(X \in [a,b]) = \frac{\text{Medida del trozo } [a,b]}{\text{Medida de la cuerda}} = \frac{b-a}{1} = b-a$$



En particular, la probabilidad de que la cuerda se rompa en algún punto situado entre el extremo izquierdo y una posición arbitraria  $x$  (con  $0 \leq x \leq 1$ ) es:

$$P(X \leq x) = P(X \in [0,x]) = \frac{\text{Medida del trozo } [0,x]}{\text{Medida de la cuerda}} = \frac{x}{1} = x$$



Evidentemente  $P(X \leq x) = 0$  si  $x < 0$  y  $P(X \leq x) = 1$  si  $x > 1$

### **Ejemplo 2:**

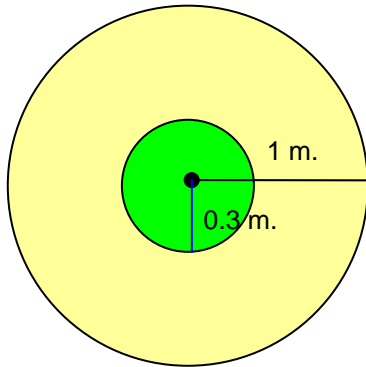
Un tirador inexperto lanza dardos contra una diana circular, de 1 metro de radio. Tras cada lanzamiento se mide la variable aleatoria

$X =$  "distancia desde el punto donde ha acertado el dardo hasta el centro de la diana"

Al igual que en el ejemplo anterior, la probabilidad de que  $X$  tome un valor concreto  $x$  es siempre 0, cualquiera que sea el valor  $x$  elegido. Sin embargo, utilizando la regla de Laplace, podemos calcular fácilmente la probabilidad de que el dardo caiga, por ejemplo, a menos de 0.3 metros del centro.



En efecto, por ser el tirador inexperto podemos suponer que todos los puntos de la diana tienen la misma probabilidad de ser alcanzados. Por tanto la probabilidad de acertar a menos de 0.3 m. del centro será igual a la probabilidad de acertar en un círculo de 0.3 m. de radio cuyo centro es también el centro de la diana. Luego:



$$P(X \leq 0.3) = \frac{\text{Área}(\text{círculo de radio } 0.3)}{\text{Área}(\text{círculo de radio } 1)} =$$

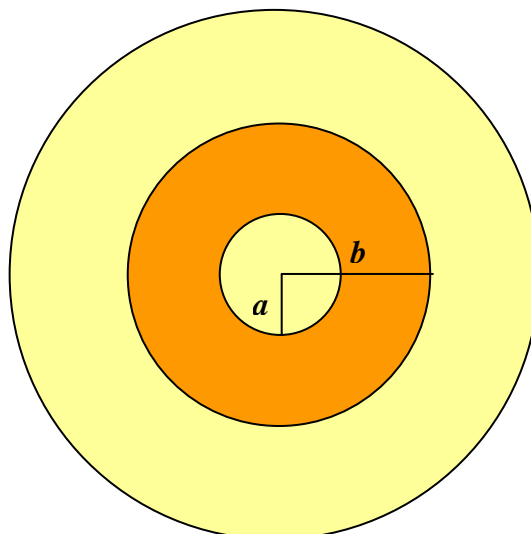
$$= \frac{\pi(0.3)^2}{\pi(1)^2} = (0.3)^2 = 0.09$$

En general, la probabilidad de acertar a una distancia inferior a  $x$  metros del centro será:

$$P(X \leq x) = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot 1^2} = x^2$$

La probabilidad de acertar a una distancia entre  $a$  y  $b$  metros del centro será, a su vez:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = b^2 - a^2$$



## **Función de distribución de probabilidad**

En general, dada cualquier variable aleatoria continua  $X$ , la función:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

siempre estará definida para todo valor  $x$  real (ya que, por construcción, los conjuntos de la forma  $\{\omega \in E / X(\omega) \leq x\}$  son sucesos en el espacio muestral  $E$  y por tanto tienen asignada una probabilidad). Así, por ejemplo, si  $M$  es el mayor valor que puede tomar la variable aleatoria  $X$ , es claro que  $F(M) = P(X \leq M) = 1$ . Al igual que en el caso de las variables aleatorias discretas, esta función se denomina **función de distribución**.

### **Algunas propiedades:**

- $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$  (Evidente, pues  $F(x)$  es una probabilidad)
- $F(x)$  es continua y no decreciente
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- Al ser  $P(X=x) = 0$  para todo  $x$  real se tiene que:
  - $P(X < x) = P(X \leq x)$
  - $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$

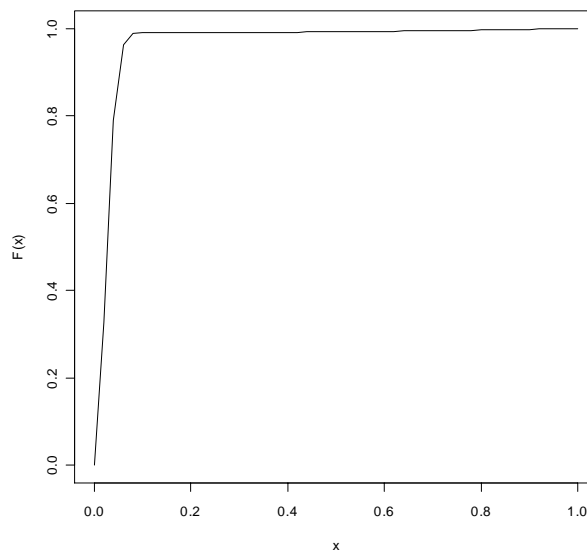
### Ejemplo 3:

Supongamos que estamos en una situación idéntica a la del ejemplo 2, pero con un tirador de dardos experto. Ahora no podemos suponer que todos los puntos de la diana tienen la misma probabilidad de ser alcanzados. Al contrario, será mucho más probable acertar cerca del centro que de los bordes, siendo la probabilidad de acertar cerca del centro tanto mayor cuanto más experto sea nuestro tirador.

Si consideramos nuevamente la variable aleatoria:

$X =$  "distancia desde el punto en que se clava el dardo hasta el centro de la diana"

la función de distribución de esta variable aleatoria podemos esperar que ahora sea de la forma:



Esta función, como vemos crece muy deprisa entre 0 y 0.1; así, por ejemplo, vemos que ya para  $x=0.1$  se tiene  $P(X \leq 0.1) = 0.97$ , o lo que es lo mismo, la probabilidad de que el dardo caiga a menos de 10 cm del centro de la diana es del 97% (que es lo que cabría esperar de un buen tirador). Si vamos mirando el resto de los valores (0.2, 0.4, 0.6, etc.), vemos que la probabilidad acumulada crece muy despacio, cosa que también es de esperar en un buen tirador, que ya ha acumulado prácticamente toda la probabilidad de acertar en los 10 cm. más próximos al centro de la diana.

Una función que se comporta de esta forma y que, por tanto, podría ser un buen modelo para esta distribución de probabilidad es:

$$F(x) = \frac{1}{1+\alpha} \left[ x^2 + \alpha \left( 1 - (1-x^2)^\beta \right) \right], \quad 0 \leq x \leq 1$$

Como puede apreciarse, esta función cumple las siguientes condiciones, necesarias para que pueda servir como función de distribución de una variable aleatoria definida en  $[0,1]$ :

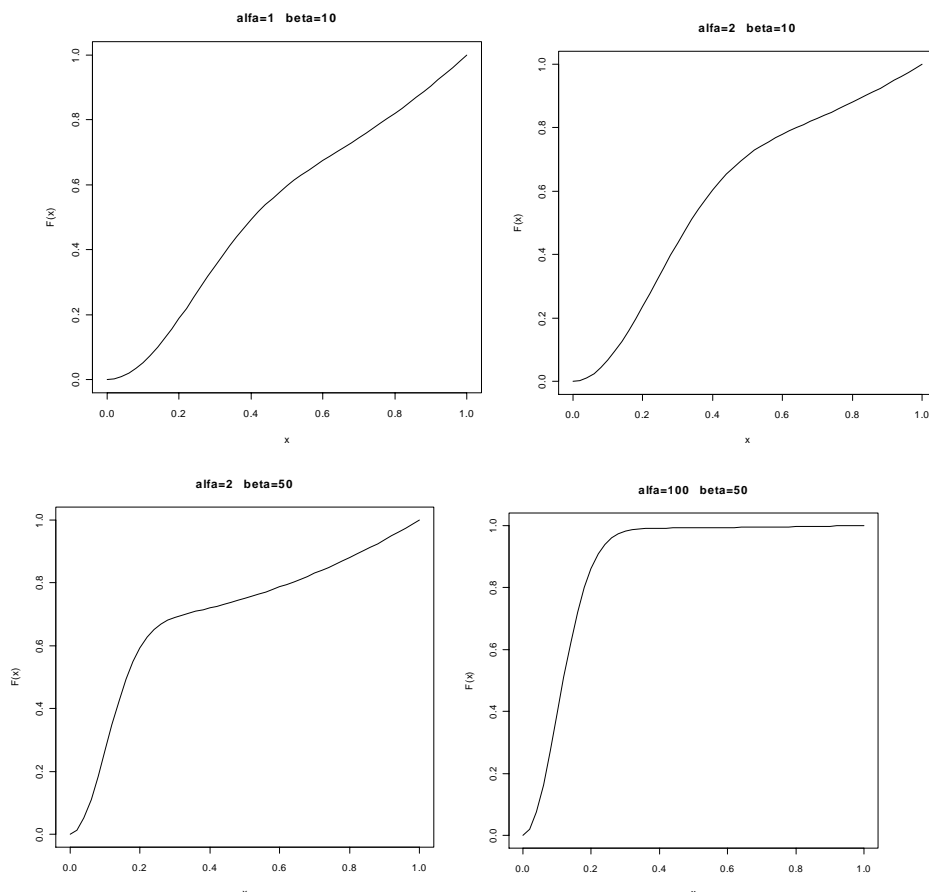
$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

$F(x)$  es continua

$$F[0] = 0; \quad F[1] = 1$$

$$F'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1] \text{ (Por tanto } F(x) \text{ es no decreciente en } [0,1])$$

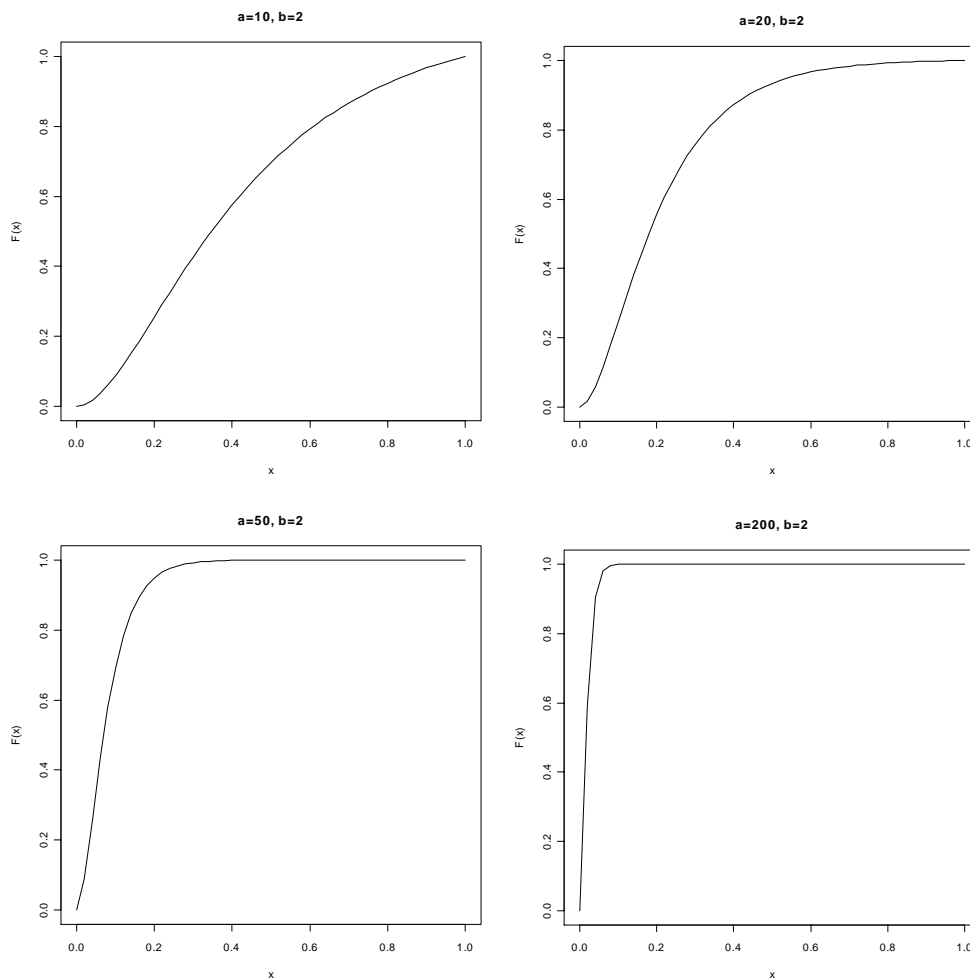
Además, para  $\alpha=0$  la función anterior se reduce a  $F(x)=x^2$  que es justo la función de distribución que ya habíamos visto para el tirador inexperto. Como podemos ver en las gráficas siguientes, variando los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  podemos hacer que esta función se ajuste al comportamiento de tiradores con distintos grados de puntería:



**NOTA:** Esta no es la única función que se comporta de esta manera. A modo de ejemplo, otra función cuya gráfica es también de la forma señalada es:

$$F(x) = k \left[ \beta^{1-\alpha} - \frac{\beta + \alpha x}{(\beta + x)^\alpha} \right], \quad \text{siendo } k = \frac{(1 + \beta)^\alpha}{(1 + \beta)^\alpha \beta^{1-\alpha} - (\alpha + \beta)}$$

En este caso, tomando  $\alpha=-1$ ,  $\beta=0$  obtenemos también la función de distribución del tirador inexperto  $F(x)=x^2$ . Al igual que antes, se cumplen las condiciones necesarias para ser función de distribución en  $[0,1]$ , y variando los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  podemos ajustar el comportamiento de tiradores con distinto grado de puntería:



La selección de este modelo o del anterior como el más adecuado a este experimento dependerá del grado de ajuste a datos muestrales debidamente obtenidos, o de consideraciones teóricas que lleven a preferir uno de los modelos sobre el otro.

## Función de densidad de probabilidad de una v.a. continua.

Ya hemos visto que en el caso de las variables aleatorias continuas la probabilidad asignada a valores de  $x$  concretos,  $P(X=x)$ , es siempre 0, mientras que la probabilidad asignada a intervalos finitos,  $P(X \in [a,b])$ , sí que puede ser distinta de 0.

Aunque no tenga mucho sentido preguntarse por la probabilidad de que ocurra **exactamente** el valor  $x$ , ya que sabemos que es 0, sí que podría tener sentido preguntarse por la probabilidad de que ocurra un valor **en un entorno próximo a  $x$** , esto es:

$$P(X \in (x, x + \Delta x])$$

Esta expresión nos da la probabilidad total de que nuestro experimento aleatorio produzca un valor en un entorno de amplitud  $\Delta x$  a la derecha de  $x$ . Si dividimos esta cantidad por  $\Delta x$  obtenemos la **densidad de probabilidad** en ese entorno (dicho de otro modo, obtenemos la cantidad de probabilidad por unidad de medida en las proximidades de  $x$ ):

$$\frac{P(X \in (x, x + \Delta x])}{\Delta x}$$

Si vamos tomando valores de  $\Delta x$  cada vez más pequeños, en el límite obtenemos la **función de densidad de probabilidad** en el punto  $x$ :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X \in (x, x + \Delta x])}{\Delta x}$$

Si ahora observamos que:

$$P(X \in (x, x + \Delta x]) = P(x < X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

es inmediato deducir que:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X \in (x, x + \Delta x])}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

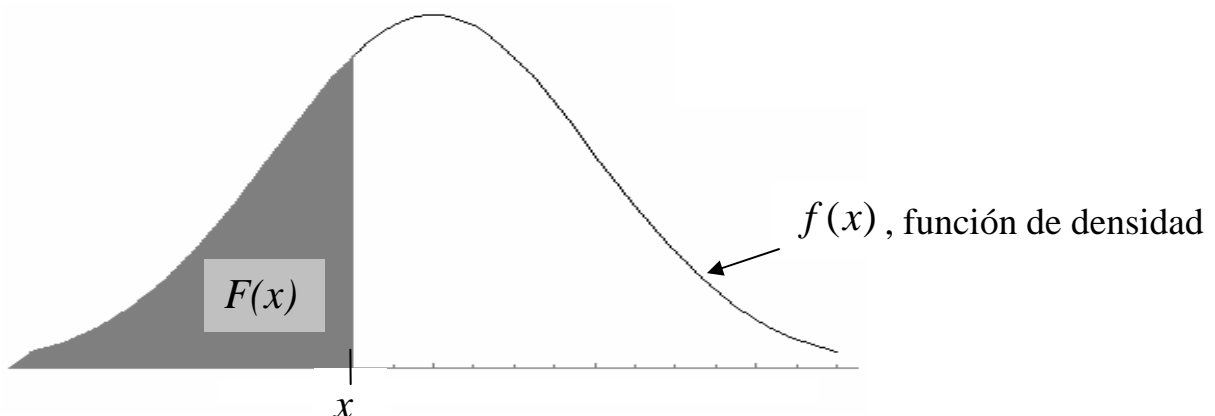
Así pues, en el caso de variables aleatorias continuas, la función de densidad de probabilidad coincide con la derivada de la función de distribución:

$$f(x) = F'(x)$$

Por tanto, la función de distribución puede obtenerse también integrando la función de densidad:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$$

Gráficamente ello significa que el valor de la función de distribución en un punto  $x$  (o lo que es lo mismo, la probabilidad acumulada hasta  $x$ ) coincide con el área encerrada bajo la función de densidad hasta ese punto:



**Ejemplo 1:**

Si volvemos a nuestro ejemplo de la cuerda, ya habíamos visto que la función de distribución de la variable  $X$ ="punto donde se rompe la cuerda al tirar de sus extremos"

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Por tanto la función de densidad se obtiene como:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

lo que refleja que la densidad de probabilidad de esta variable es constante en todos los puntos de la cuerda (resultado que era de esperar toda vez que es igualmente probable que la cuerda se rompa en cualquier punto).

**Ejemplo 2:**

En el caso del tirador inexperto habíamos visto que la función de distribución de la variable:

$X$ ="distancia desde el punto en que acierta el dardo al centro de la diana"

era:

$$F(x) = P(X \leq x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Por tanto la función de densidad de esta variable aleatoria es:

$$f(x) = F'(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

lo que indica que la densidad de probabilidad aumenta linealmente con el valor de  $x$ .

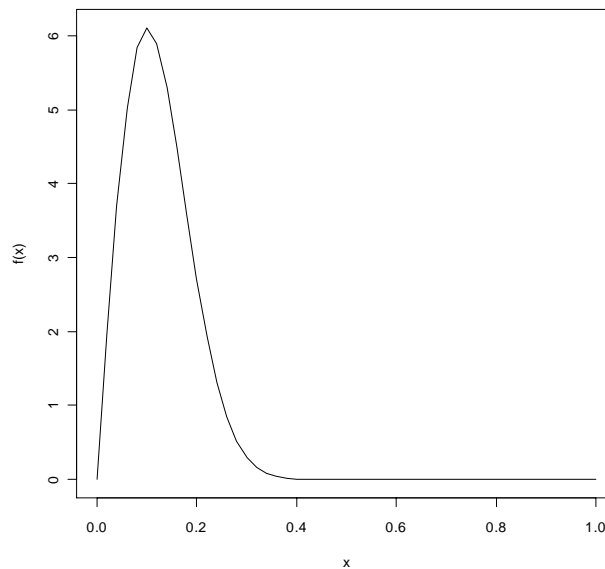


**Ejemplo 3:**

En el caso del tirador experto, la función de densidad sería:

$$f(x) = \frac{2x}{1 + \alpha} \left(1 + \alpha\beta(1 - x^2)^{\beta-1}\right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

En su representación gráfica, que se muestra a continuación (para  $\alpha=100$ ,  $\beta=50$ ), se observa que la densidad de probabilidad es grande cerca del cero (centro de la diana), lo que indica que es muy probable acertar en ese entorno, y decrece a medida que nos alejamos del centro, lo que indica que es difícil (muy poco probable) que el tirador experto llegue a lanzar el dardo lejos del centro.



**Algunas propiedades de la función de densidad:**

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$2) P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

$$3) F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

En la primera propiedad, por generalidad se han puesto como límites de integración  $-\infty$  e  $\infty$ . Si la función de densidad sólo toma valores distintos de 0 en un intervalo  $[a,b]$ , los límites de integración se restringen a los extremos de este intervalo.

### 1.3. Parámetros de una variable aleatoria

En el tema anterior hemos visto la analogía existente entre el concepto de **frecuencia relativa** con que se presenta un valor en un conjunto de datos obtenidos generalmente mediante muestreo, y el concepto de **probabilidad** de que se produzca un valor concreto como resultado de un experimento aleatorio:

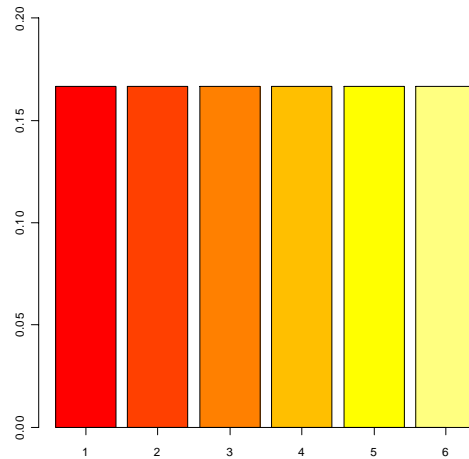
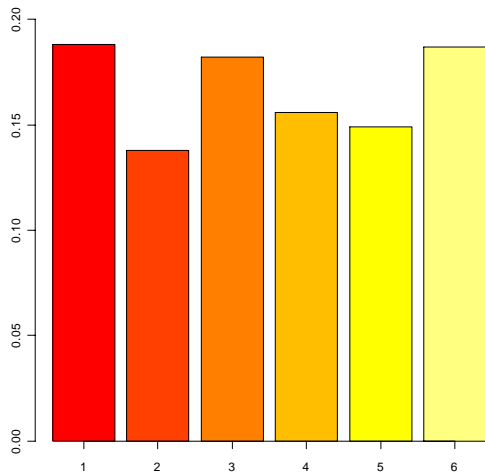
- En particular una de las formas de asignar probabilidades a sucesos es precisamente tomar como probabilidad de un suceso dado la frecuencia relativa con que se presenta dicho suceso cuando el experimento aleatorio se realiza muchas veces, por lo cual ambos conceptos coinciden en este caso.
- Y, aún cuando no se haya realizado una asignación frecuentista, la probabilidad de obtener al azar determinado valor en una población coincide con la proporción (que en definitiva también es la frecuencia relativa) en que dicho valor se halla presente en la población.

A la hora de sintetizar (resumir) los valores observados en un conjunto de datos, hasta ahora hemos hablado de medidas de posición (**Media**, mediana, moda, percentiles), medidas de dispersión (**Varianza**, **desviación típica**) y medidas de forma (**momentos**, simetría, apuntamiento).

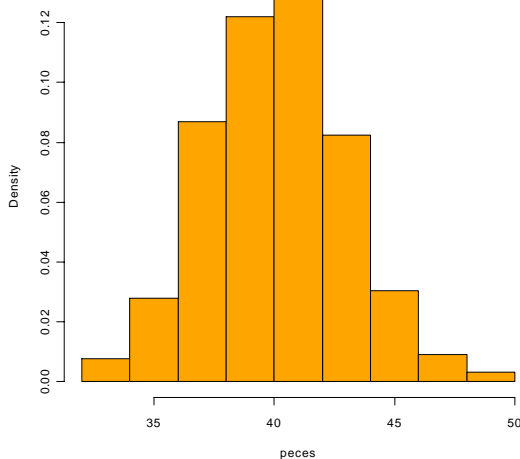
Estas medidas, de hecho, caracterizan la **distribución de frecuencias relativas** de los datos (la forma en que se reparten las frecuencias relativas entre los distintos valores): la media nos señala donde está el centro de esta distribución, la desviación típica nos indica si es una distribución muy concentrada o muy dispersa, la curtosis nos informa de su grado de apuntamiento ...

Estas medidas de síntesis pueden generalizarse de modo natural a las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias.

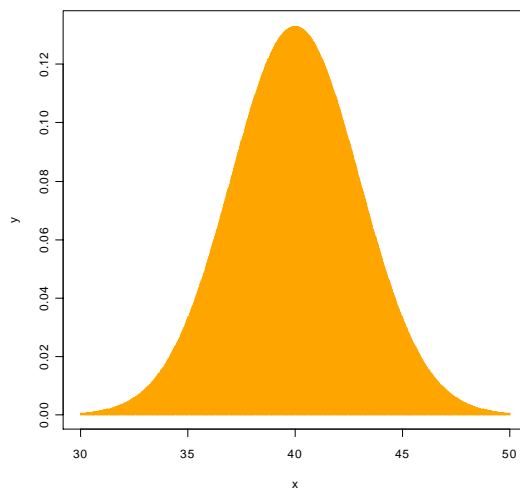
DIAGRAMA DE BARRAS RESULTANTE DE LANZAR UN DADO 1000 VECES



HISTOGRAMA DE LONGITUDES DE UNA MUESTRA DE 1000 PECES.



FUNCIÓN DE DENSIDAD DE LA VARIABLE ALEATORIA LONGITUD DEL PEZ



En el caso de variables discretas, *el diagrama de barras viene a ser lo mismo que el gráfico de la función de probabilidad*; en el caso continuo, *el histograma coincide conceptualmente con el gráfico de la función de densidad de probabilidad*.

Del mismo modo que la media se sitúa en la posición central del diagrama de barras o del histograma, es posible definir un concepto equivalente que se sitúe en la posición central de la distribución de probabilidades. Al igual que la desviación típica mide la dispersión en el diagrama de barras o en el histograma, es posible con un concepto equivalente medir la dispersión en la distribución de probabilidades...

Estos conceptos se conocen como **parámetros** característicos de la distribución de probabilidades de una variable aleatoria.

## Media, Varianza y momentos de una variable aleatoria

### Medidas de síntesis para datos medidos sobre una población de tamaño $N$ :

Recordemos que si hemos medido **todos** los valores de una variable en una población de tamaño  $N$ , en la que hay  $k$  valores distintos  $x_1, x_2, \dots, x_k$  y donde  $f_i$  = frecuencia relativa del valor  $x_i$ , se definen las siguientes medidas de síntesis, cada una de ellas asociada a una característica distinta de la distribución de frecuencias de los datos:

| Nombre                                   | Expresión matemática                       | Característica medida           |
|--|--|---------------------------------|
| Media                                    | $\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$           | Posición central                |
| Varianza                                 | $s^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i$ | Dispersión                      |
| Momento de orden $r$ respecto a la media | $m_r = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^r f_i$ | Forma (asimetría, apuntamiento) |

**Parámetros de una variable aleatoria discreta:**

Dada una variable aleatoria discreta  $X$  de la que conocemos su distribución de probabilidad:

|              |       |       |       |       |       |       |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $X$          | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ..... | ..... | $x_k$ |
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ..... | ..... | $p_k$ |

se definen sus parámetros de modo análogo a las medidas de síntesis anteriores. En este caso los parámetros miden características de la distribución de probabilidad:

| Nombre                                   | Expresión Matemática   | Característica medida           |
|--|--|---------------------------------|
| Media o Esperanza                        | $\mu = E[X] = \sum_{i=1}^k x_i p_i$  | Posición central                |
| Varianza                                 | $\sigma^2 = Var[X] = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p_i =$<br>$= E[(X - \mu)^2]$ | Dispersión                      |
| Momento de orden $r$ respecto a la media | $\mu_r = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^r p_i =$<br>$= E[(X - \mu)^r]$             | Forma (asimetría, apuntamiento) |

**Ejemplo:**

Si  $X = \text{"Lanzar un dado (equilibrado)"}$ :

La posición central de la distribución de probabilidad de esta variable es:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^k p_i x_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Asimismo, su dispersión (variabilidad) puede medirse mediante:

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - \mu)^2 = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2,91$$

### **Parámetros de una variable aleatoria continua**

Dada una variable aleatoria continua  $X$  de la que conocemos su función de densidad de probabilidad  $f(x)$ , si  $dx$  es una cantidad infinitesimal, el producto  $f(x) dx$  mide aproximadamente la cantidad de probabilidad en el intervalo  $[x, x+dx]$ . Con esta idea en mente, pueden generalizarse al caso continuo las medidas vistas para el caso discreto, con la consideración obvia de que las sumas habrán de ser sustituidas por integrales:

| Nombre                                   | Expresión Matemática  | Característica medida           |
|--|---|---------------------------------|
| Media o Esperanza                        | $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  | Posición central                |
| Varianza                                 | $\sigma^2 = V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx =$<br>$= E[(x - \mu)^2]$ | Dispersión                      |
| Momento de orden $r$ respecto a la media | $m_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx =$<br>$= E[(x - \mu)^r]$             | Forma (asimetría, apuntamiento) |

### **Ejemplo:**

En el caso del tirador de dardos inexperto, la función de densidad de probabilidad de la variable:

$X =$  "distancia a la que cae el dardo desde el centro de la diana"

Es, como ya hemos visto,  $f(x) = 2x$   $0 \leq x \leq 1$ . La distancia media a la que caen los dardos lanzados por este tirador sería entonces:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{2}{3} = 0,66$$

La dispersión de los diferentes puntos de acierto vendría dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) 2x dx = \\
 &= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right) dx = \left[2\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{8}{9}\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \\
 &= \frac{33}{18} = 1,83
 \end{aligned}$$

$$\text{Desv. Tip.}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1,83} = 1,354$$

### Interpretación de los parámetros de una v.a.

**Esperanza:** representa la media de todos los valores que tomaría la variable aleatoria  $X$  si el experimento aleatorio que da lugar a esta variable se realizara un número muy grande de veces.

**Varianza:** representa la varianza de todos los valores que tomaría la variable aleatoria  $X$  si el experimento aleatorio que da lugar a esta variable se realizara un número muy grande de veces.



## Algunas propiedades de la media y la varianza de variables aleatorias.

Sea  $X$  una variable aleatoria (discreta o continua).

1. Cambio de escala: si  $Y = c \cdot X$

$$\mu_Y = E[Y] = E[cX] = cE[X] = c\mu_X$$

$$\sigma_Y^2 = E[(Y - \mu_Y)^2] = E[(cX - c\mu_X)^2] = E[c^2(X - \mu_X)^2] = c^2\sigma_X^2$$

$$\sigma_Y = |c|\sigma_X$$

2. Traslación: si  $Y = X+c$

$$\mu_Y = E[Y] = E[X + c] = E[X] + c = \mu_X + c$$

$$\sigma_Y^2 = E[(Y - \mu_Y)^2] = E[(X + c - \mu_X - c)^2] = \sigma_X^2$$

$$\sigma_Y = \sigma_X$$

## Esperanza de una función de una variable aleatoria.

Es frecuente en la práctica que del valor que tome una variable aleatoria  $X$  dependa una función de la misma  $g(X)$ . Se define entonces la esperanza de esta función como:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^k g(x_i) p_i & \text{Si } X \text{ es una v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & \text{Si } X \text{ es una v.a. continua} \end{cases}$$

siendo  $p_i = P(X=x_i)$  la función de probabilidad de  $X$  en el caso discreto y  $f(x)$  la función de densidad de probabilidad de  $X$  en el caso continuo.

**Ejemplo 1:**

Supongamos que apostamos en un juego de dados de la siguiente forma: Se tira un dado; si sale número par ganamos 1 €; si sale número impar perdemos 1€. ¿Cuál será nuestra ganancia (o pérdida) esperada en este juego?

En este caso la función  $g(x)$  que mide la ganancia en el juego es:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x = 1 \\ 1 & \text{Si } x = 2 \\ -1 & \text{Si } x = 3 \\ 1 & \text{Si } x = 4 \\ -1 & \text{Si } x = 5 \\ 1 & \text{Si } x = 6 \end{cases}$$

y su valor esperado:

$$\begin{aligned} E[g(x)] &= \sum_{i=1}^6 g(x_i) p_i = -1p_1 + 1p_2 - 1p_3 + 1p_4 - 1p_5 + 1p_6 = \\ &= -1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 0 \end{aligned}$$

Así pues, por término medio en este juego no ganaremos (ni perderemos) nada.

**Ejemplo 2:**

Supongamos que somos malos tiradores de dardos y que jugamos del siguiente modo: lanzamos un dardo a una diana de un metro de diámetro; si acertamos a menos de 10 cm. del centro ganamos 20 €, si acertamos entre 10 y 20 cm del centro ganamos 10 €; si nuestro dardo cae a más de 20 cm. del centro perdemos 1 €. ¿Merece la pena jugar a este juego?

En este caso, la función que mide la ganancia en el juego es:

$$g(x) = \begin{cases} 20 & \text{Si } x < 0.1 \\ 10 & \text{Si } 0.1 \leq x < 0.2 \\ -1 & \text{Si } x \geq 0.2 \end{cases}$$

y su valor esperado sería (recordemos que la función de densidad del mal tirador de dardos era  $f(x)=2x$  para  $x$  entre 0 y 1):

$$\begin{aligned} E[g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_0^1 g(x) 2x dx = \int_0^{0.1} 20 \cdot 2x dx + \int_{0.1}^{0.2} 10 \cdot 2x dx + \int_{0.2}^1 (-1) \cdot 2x dx = \\ &= \left[ 40 \frac{x^2}{2} \right]_0^{0.1} + \left[ 20 \frac{x^2}{2} \right]_{0.1}^{0.2} - \left[ 2 \frac{x^2}{2} \right]_{0.2}^1 = 20 \cdot 0.01 + 10(0.04 - 0.01) - (1 - 0.04) = \\ &= 0.2 + 0.3 - 0.96 = -0.91 \end{aligned}$$

Por tanto, de jugar reiteradamente a este juego, podemos esperar perder, por término medio, 0.91 €.