TEMA V: NUMEROS INDICES

1.- Introducción, concepto y clasificación

Generalmente las magnitudes socioeconómicas varían en el espacio y/ó en el tiempo y normalmente surge la necesidad de hacer comparaciones en función del tiempo y/ó el espacio, tanto por separado como por grupos o conjunto de las mismas. Con el fin de poder realizar estas comparaciones es necesario elaborar series de indicadores económicos, siendo los números índices uno de ellos.

En síntesis podemos decir que los números índices constituyen una técnica para analizar y comparar un conjunto de datos en distintos momentos del tiempo y/ó del espacio.

Los números índices pueden tener distinta naturaleza: A) NATURALEZA ESTADISTICA, cuando se obtienen sin tener en cuenta las posibles relaciones funcionales de las magnitudes en estudio, y B) NATURALEZA FUNCIONAL, cuando se obtienen suponiendo una relación funcional entre los valores de las variables y su entorno. En este tema nos centraremos en los números índices de naturaleza estadística y comentaremos los de naturaleza funcional en un anexo.

Mediante los números índices se pretende estudiar las variaciones de un fenómeno complejo por medio de una expresión que permita comparar dos o más situaciones distintas en el tiempo y/ó el espacio.

La teoría de los números índices se ha desarrollado, fundamentalmente, para el estudio de las variaciones de precios, tratando de medir el nivel general de precios e inversamente, el poder adquisitivo del dinero. Sin embargo, la aplicabilidad de estos indicadores no se limita al estudio de los precios, utilizándose en todos los campos de la actividad humana que se pueden observar y cuantificar estadísticamente. En economía tienen un gran empleo, existiendo números índice de salarios, producción, precios, comercio exterior, etc.

En resumen, podemos decir que un número índice, indica, mediante sus variaciones, los cambios de una magnitud que no es susceptible de medición exacta en sí misma, ni de una evaluación directa en la práctica.

Atendiendo a la naturaleza estadística, podemos establecer la siguiente clasificación de los números índice:

NUMEROS INDICE

- SIMPLES
- COMPLEJOS
  - SIN PONDERAR
    - MEDIA SIMPLE
      - ARITMETICA
      - GEOMETRICA
      - ARMONICA
    - MEDIA AGREGATIVA SIMPLE
  - PONDERADOS
    - LASPEYRES
    - PAASCHE
    - EDGEWORTH
    - FISHER

V.2.- Números Índices simples. Definición y propiedades.

Los números índices simples se refieren a un solo artículo o concepto, lo cual se traduce a trabajar con una variable unidimensional. Son simples relaciones o porcentajes entre los valores de un artículo o concepto correspondientes a dos épocas o lugares que desean compararse. La comparación se realiza entre el valor correspondiente a un periodo fijo (periodo base) y el valor alcanzado por la magnitud en cualquier otro momento t.

Formalicemos el concepto. Dada una serie temporal $\{H_t\}$, los números índices se obtienen dividiendo cada uno de los valores de la variable en cada momento por el valor que tomó la variable en el instante de referencia, denominado periodo base.

Definimos el índice de la magnitud H y lo denotamos por $I_{t/0}(H)$ a:

$$I_{t/0}(H) = \frac{H_t}{H_0}$$

Siendo: H_t el valor de la variable en el momento t.

H_0 el valor de la variable en el momento 0.

El índice así definido nos da el tanto por uno en que se ha modificado la magnitud H desde el periodo 0 al periodo t. Por ejemplo, si

$$I_{t/0}(H) = \frac{H_t}{H_0} = 1.5$$

quiere decir que por cada unidad de la variable H que existía en el instante 0 (periodo base), en el instante t existen 1.5 unidades.

Normalmente se utiliza el índice en términos porcentuales:

$$I_{t/0}(H) = \frac{H_t}{H_0} \times 100$$

En este caso obtenemos el tanto por ciento.

Realmente, lo que hacemos al hallar el número índice es un cambio de variable, pasamos de la magnitud H a la magnitud I(H) y por tanto todos los estadísticos que definamos para H, estarán definidos para I(H) y viceversa.

La variación porcentual que presenta la magnitud H desde el instante 0, al actual (t), la denominamos incremento del índice y lo expresamos:

$$\Delta I_{t/0}(H) = \frac{H_t - H_0}{H_0} \times 100 = \frac{H_t}{H_0} \times 100 - 100 =$$

$$= I_{t/0}(H) - 100$$

Si $\Delta I_{t/0}$ (H) = 20 significa que la magnitud H, desde el instante 0 al t, se ha incrementado en un 20%.

Algunas de las propiedades que presentan los números índices simples se enumeran a continuación.

1ª.-<u>Propiedad circular</u>

A) Consideramos tres instantes del tiempo (0, t', t) los cuales verifican la relación: $0 < t' < t$.

B) Tomamos la magnitud H que toma valores desde el instante t = 0, 1,...t',...t,...T

La propiedad circular nos dice que:

$$I_{t/0}(H) = I_{t/t'}(H) \text{ x } I_{t'/0}(H)$$

La demostración es inmediata,

$$I_{t/0}(H) = \frac{H_t}{H_0}$$

$$I_{t/0}(H) = \frac{H_t}{H_0} \text{ x } \frac{H_{t'}}{H_{t'}} = \frac{H_t}{H_{t'}} \text{ x } \frac{H_{t'}}{H_0} = I_{t/t'}(H) \text{ x } I_{t'/0}(H)$$

2ª.-<u>Propiedad de encadenamiento</u>

A) Consideramos tres instantes del tiempo (0, t', t) los cuales verifican la relación: $0 < t' < t$.

B) Tomamos la magnitud H, desde el instante t = 0,1,...t'...t hasta t = T.

Se cumple: $I_{t/0}(H) = I_{t/t-1}(H) \text{ x } I_{t-1/t-2}(H) \ldots I_{1/0}(H)$

Demostración:

$$I_{t/0}(H) = \frac{H_t}{H_{t-1}} \text{ x } \frac{H_{t-1}}{H_{t-2}} \text{ x } \frac{H_{t-2}}{H_{t-3}} \text{ x } \ldots \text{ x } \frac{H_1}{H_0} = \frac{H_t}{H_0}$$

3ª.-Propiedad del producto

Sea una magnitud compleja R que se obtiene como producto de dos magnitudes simples F y K. R toma valores desde

$t = 0, 1, ..., T$

$R = F \times K$; $\{R\} \rightarrow t = 0, 1, ..., T$

Se verifica que $I_{t/0}(R) = I_{t/0}(F) \times I_{t/0}(K)$

Demostración:

$$I_{t/0}(R) = \frac{R_t}{R_0} = \frac{F_t}{F_0} x \frac{K_t}{K_0} = I_{t/0}(F)\ x\ I_{t/0}(K)$$

4ª.-Propiedad del cociente

Si tenemos una magnitud compleja R que se obtiene como cociente entre dos magnitudes simples F y K, se verifica:

$$I_{t/0}(R) = I_{t/0}(F) / I_{t/0}(K)$$

Demostración:

$$I_{t/0}(R) = \frac{R_t}{R_0} = \frac{F_t / K_t}{F_0 / K_0} = I_{t/0}(F) / I_{t/0}(K)$$

Ejemplo: Dada la siguiente tabla:

t	H_t

0	5
1	7
2	6
3	8
4	9
5	10

(1) Hallar los índices simples respecto al período t=0.

(2) Comprobar que se cumple la propiedad circular y la de encadenamiento.

(3) Interpretar alguno de los índices.

SOLUCION:

(1)

t	H_t	$I_{t/0}(H)$ (1)
0	5	$I_{0/0}(H) = 5/5 = 1$
1	7	$I_{1/0}(H) = 7/5 = 1.4$
2	6	$I_{2/0}(H) = 6/5 = 1.2$
3	8	$I_{3/0}(H) = 8/5 = 1.6$
4	9	$I_{4/0}(H) = 9/5 = 1.8$
5	10	

(2):(A) Propiedad circular.

$$I_{t/0}(H) = I_{t/t'}(H) \times I_{t'/0}(H)$$

Si $t' = 4$ y $t = 5$, sería:

$I_{5/0}(H) = I_{5/4}(H) \times I_{4/0}(H)$

$I_{5/0}(H) = 2$

$I_{5/4}(H) = 10/9$

$I_{4/0}(H) = 9/5$

$2 = 10/9 \times 9/5$

(2): (B) Propiedad de encadenamiento.

$I_{t/0}(H) = I_{t/t-1}(H) \times I_{t-1/t-2}(H) \ldots I_{1/0}(H)$;

para t = 5:

$I_{5/0} = I_{5/4} \times I_{4/3} \times I_{3/2} \times I_{2/1} \times I_{1/0}$:

$10/5 = 10/9 \times 9/8 \times 8/6 \times 6/7 \times 7/5 = 2$

(3): Si $I_{5/0}(H) = 2$, supone que la magnitud H se ha duplicado entre el periodo 0 y el 5.

V.3.- Números índices complejos.

Los números índices complejos hacen referencia a varios artículos o conceptos a la vez (magnitudes complejas) y su evolución en el espacio y/ó el tiempo.

Supongamos que una empresa tiene tres productos A, B y C; cada uno de los cuales tiene su correspondiente precio (P_A, P_B y P_C). Si nos interesara la evolución de cada precio individualmente, hallaríamos los índices simples de P_A, P_B y P_C, pero si lo que queremos analizar es la evolución del precio general de la empresa, tendremos que tener en cuenta la evolución conjunta de todos ellos. Esto lo podemos hacer de dos formas:

(A) Suponiendo que cada producto tiene la misma importancia relativa dentro de la empresa, en este caso calcularíamos los INDICES COMPLEJOS SIN PONDERAR.

(B) Suponiendo que cada producto tiene distinta importancia relativa dentro de la empresa. Calcularíamos los INDICES COMPLEJOS PONDERADOS.

V.3.1.- Números índices complejos sin ponderar.

Sea una magnitud compleja H, formada por K magnitudes simples:H= = $\{H^1, H^2,...,H^k\}$, si queremos analizar la evolución de H, lo tendremos que hacer en función de la evolución de las K magnitudes simples que la forman.

$$I(H) = f[I(H^i)],$$

es decir, el índice de H se obtiene en función de los índices de H^i. Dos formas de hacerlo son mediante los índices de la MEDIA SIMPLE, y mediante la MEDIA AGREGATIVA SIMPLE.

INDICES DE LA MEDIA SIMPLE:

1.-<u>Indice de la media aritmética simple</u>

$$I_{t/0} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k} I_{t/0}\left(H^i\right)$$

Es una media aritmética de los índices simples.

Ejemplo: Una empresa fabrica el producto H cuyos componentes son H^1, H^2 y H^3, suponiendo que todos los componentes tienen la misma importancia relativa en H. Calcular $I_{t/0}(H)$ e interpretar los resultados según la siguiente tabla:

t	H^1	H^2	H^3
0	2	1	3

1	4	2	2
2	5	1	1
3	7	3	1
4	9	4	4

SOLUCION:

Para calcular $I_{t/0}(H)$:

1°.-Calculamos los índices simples con respecto al instante 0, $[I_{t/0}(H^i)]$: $I_{2/0}(H^2) = 2/1 = 2$

t	H^1	H^2	H^3	$I_{t/0}(H^1)$	$I_{t/0}(H^2)$	$I_{t/0}(H^3)$
0	2	1	3	1	1	1
1	4	2	2	4/2=2	2/1=2	2/3=0.7
2	5	1	1	5/2=2.5	1/1=1	1/3=0.3
3	7	3	1	7/2=3.5	3/1=3	1/3=0.3
4	9	4	4	9/2=4.5	4/1=4	4/3=1.3

2°.-Calculamos el índice complejo $I_{t/0}(H) = 1/K\ \Sigma^k_{i=1}\ I_{t/0}(H^i)$:

$I_{4/0}(H) = 1/3\ \Sigma^k_{i=1}\ I_{4/0}(H^i) = 1/3\ (4.5+4+1.3) = 3.3$:

t	H^1	H^2	H^3	$I_{t/0}(H^1)$	$I_{t/0}(H^2)$	$I_{t/0}(H^3)$	$I_{t/0}(H)$
0	2	1	3	1	1	1	1/3(1+1+1)=1
1	4	2	2	4/2=2	2/1=2	2/3=0.7	1/3(2+2+0.7)=1.6

2	5	1	1	5/2=2.5	1/1=1	1/3=0.3	1/3(2.5+1+0.3)=1.3
3	7	3	1	7/2=3.5	3/1=3	1/3=0.3	1/3(3.5+3+0.3)=2.3
4	9	4	4	9/2=4.5	4/1=4	4/3=1.3	1/3(4.5+4+1.3)=3.3

Interpretación: La magnitud H, en el momento 1, tiene 1.6 unidades por cada unidad que tenía en el instante 0; en el momento 2, tiene 1.3 con respecto 0; etc.

Una vez calculados los índices para cada instante t en relación al periodo inicial podemos calcular el incremento porcentual que ha tenido la magnitud H desde el instante 0 al período actual:

Incremento del Indice:

$$\Delta I_{t/0}(H) = I_{t/0}\ x\ 100 - 100 = \frac{H_t - H_0}{H_0}\ x\ 100$$

$\Delta I_{1/0}(H) = I_{1/0}(H)\ x\ 100 - 100 = 160 - 100 = 60\%$

$\Delta I_{2/0}(H) = I_{2/0}(H)\ x\ 100 - 100 = 130 - 100 = 30\%$

$\Delta I_{3/0}(H) = I_{3/0}(H)\ x\ 100 - 100 = 230 - 100 = 130\%$

$\Delta I_{4/0}(H) = I_{4/0}(H)\ x\ 100 - 100 = 330 - 100 = 230\%$

2.-<u>Indice de la media geométrica</u>: En este caso se utiliza la media geométrica de los índices simples (H^i) para calcular el índice complejo $I_{t/0}$ (H).

$$I_{t/0}(H) = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{H_t^i}{H_0^i}}$$

3.-<u>Indice de la media armónica</u>: El promedio que utilizamos, en este caso, es la media armónica de los índices simples (H^i)

$$I_{t/0}(H) = \frac{K}{\sum_{i=1}^{k} \frac{H_0^i}{H_t^i}}$$

El índice complejo mediante la MEDIA AGREGATIVA SIMPLE considera la relación entre las sumas de los dos distintos valores en los dos períodos:

$I_{t/0}(H) = \Sigma^k_{i=1} H_t^i / \Sigma^k_{i=1} H_0^i$

Estos índices tienen todos las mismas limitaciones, destacando:

1) Heterogeneidad de las unidades de medida, motivo que nos impide hacer comparaciones entre distintos índices.

2) Dan la misma importancia relativa a cada componente simple (H^i) de la magnitud compleja H.

Por estos motivos no se ha generalizado su uso, empleándose, en la mayoría de los casos, los índices complejos ponderados.

V.3.2.- Números índices complejos ponderados.

Su objetivo es solucionar los problemas planteados por los índices complejos sin ponderar. Los índices complejos ponderados tienen en cuenta la importancia relativa de las distintas magnitudes simples que lo componen, que denominaremos $\mathbf{w_i}$. Por construcción se debe de cumplir:

$$\sum_{i=1}^{k} w_t^i = 1$$

para todo t, siendo k, el número de magnitudes simples que forman la magnitud compleja.

¿Qué importancia tiene la ponderación? Si queremos obtener un índice de precios de consumo deberíamos,

1° Determinamos los elementos (magnitudes) que componen el consumo habitual de una familia,

2° Averiguamos los precios de esos elementos.

3° Averiguamos la importancia relativa (w_i) de cada elemento en el consumo habitual de la familia.

Es evidente que todas las familias consumen alimentos, vestido, vivienda y energía; pero también es evidente que la importancia de cada uno de estos elementos en el consumo habitual de una familia es muy distinta. Si diéramos la misma importancia a todos ellos (índice complejo sin ponderar) obtendríamos un Indice de Precios de Consumo que poco tiene que ver con la realidad.

En función de la relación entre las ponderaciones w_t^i y los índices de las componentes $I_{t/0}(H^i)$, podemos definir distintos tipos de índices.

V.3.2.1.- Índice de Laspeyres.

De forma general, llamamos índice sintético de Laspeyres de la magnitud compleja (H) (formada por k magnitudes simples) en el instante t, con respecto al instante 0:

$$L_{t/0}(H) = \sum_{i=1}^{k} w_0^i \, I_{t/0}\left(H^i\right); \; i = 1,2,\ldots,k; \; t = 0,\ldots,T$$

Es decir, es el sumatorio de la importancia relativa de la magnitud simple i, en el instante 0, (w^i_0), multiplicada por el índice de la magnitud simple i en el instante t con respecto al instante 0 [$I_{t/0}$ (H^i)]:

$$L_{t/0}(H) = \sum_{i=1}^{k} w_0^i \frac{H_t^i}{H_0^i}$$

V.3.2.2.- Índice de Paasche.

Llamamos índice sintético de Paasche de la magnitud compleja H (formada por k magnitudes simples), en el instante t con respecto al instante 0, y lo denotaremos por $P_{t/0}$ (H), a:

$$\frac{1}{P_{t/0}(H)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_t^i}{I_{t/0}(H^i)}$$

El inverso del índice de Paasche [$1/P_{t/0}$ (H)] lo obtenemos como el cociente entre el sumatorio de las importancias relativas de la magnitud simple **i** en el instante **t** (w_t^i) y el índice de la magnitud simple **i** en el instante **t** respecto al instante **0** $[I_{t/0}\ (H^i)]$:

$$\frac{1}{P_{t/0}(H)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_t^i}{I_{t/0}(H^i)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_t^i H_0^i}{H_t^i}$$

La diferencia fundamental entre los índices de Laspeyres y Paasche estriba en las ponderaciones, mientras que en Laspeyres, w^i se refiere al periodo base (w_0^i), en Paasche se refiere al periodo actual (w_t^i). Esto hace que su cálculo sea más difícil puesto que en cada instante hay que calcular w_t^i.

V.3.2.3.- Índice de Fisher.

Dada una magnitud compleja H, compuesta por k magnitudes simples, se define el índice de Fisher de la magnitud H y se denota por $F_{t/0}$ (H), como la raíz cuadrada del producto del índice de Paasche por el índice de Laspeyres:

$$F_{t/0}(H) = \sqrt{L_{t/0}(H)\, P_{t/0}(H)}$$

Como se puede obserar, el índice de Fisher es una valor promedio de los índices de Laspeyres y Paasche.

V.4.- Índices complejos ponderados de precios y cantidades.

Un caso concreto de uso de los índices complejos es el cálculo de la evolución de los precios y de las cantidades de nuestra empresa, de una economía regional, nacional, etc... Es por ello que el estudio de los índices de precios y cantidades sea un epígrafe importante a desarrollar en este punto del temario.

Debido al problema de la homogenización, en economía se maneja el **valor** de los bienes, el cual se obtiene mediante el producto: **precio x cantidad.**

$$V = P \times Q$$

Si queremos obtener el valor de un producto en distintos períodos, tendríamos:

período 0 ---- $V_0 = P_0 \times Q_0$
período 1 ---- $V_1 = P_1 \times Q_1$
período 2 ---- $V_2 = P_2 \times Q_2$
.
. (1)
.
período t ---- $V_t = P_t \times Q_t$

Siendo V_0 ... V_t la serie de valores en los distintos periodos.

Las variaciones en V_i vienen originadas tanto por variaciones en los precios (P_i) como en las cantidades (Q_i).

Si dejamos fija la cantidad (suponemos que en todos los períodos se produce o se consume lo mismo), la serie de valores obtenida será:

período 0 ---- $V_0 = P_0 \times Q$
período 1 ---- $V_1 = P_1 \times Q$
período 2 ---- $V_2 = P_2 \times Q$
.

.
.   (2)
período t ---- $V_t = P_t \times Q$

V_0, V_1 ..., V_t sería la serie de valores cuyas variaciones son debidas, exclusivamente, a cambios en los precios.

Si dejamos fijo el precio (suponemos que en todos los períodos el precio es constante), la serie de valores obtenida será:

período 0 ---- $V_0 = P \times Q_0$
período 1 ---- $V_1 = P \times Q_1$
período 2 ---- $V_2 = P \times Q_2$
.
.   (3)
.
período t ---- $V_t = P \times Q_t$

V_0, V_1 ..., V_t sería la serie de valores cuyas variaciones son debidas, exclusivamente, a cambios en las cantidades.

Si en la serie de valores (2) calculamos un índice obtendríamos un índice de precios:

$$P_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k} P_t^i\, Q^i}{\sum_{i=1}^{k} P_0^i\, Q^i}$$

Si calculamos el índice en (3) obtendríamos un índice de cantidad:

$$Q_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k} P^i\, Q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} P^i\, Q_0^i}$$

Al calcular el índice en (1), obtenemos un índice de valor:

$$V_{t/0} = \frac{\sum_{i=1}^{k} P_t^i \, Q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} P_0^i \, Q_0^i}$$

Podemos observar que el índice de precios (P) está ponderado por la cantidad, mientras que el índice de cantidad (Q), está ponderado por el precio, pero ninguna de estas ponderaciones está referida a un periodo concreto. Según el periodo a que esté referida la ponderación tenemos los índices de LASPEYRES, PAASCHE, FISHER tal y como ya hemos visto.

INDICES DE **LASPEYRES**

En economía las aplicaciones de números índice se concretan en analizar las evoluciones de precios y cantidades. Si aplicamos a este fín el **índice de Laspeyres**, estamos estudiando las variaciones de precios o cantidades tomando como **periodo de ponderación el año base**. En este caso el factor de ponderación w^i_0 es:

$$w_0^i = \frac{p_0^i \, q_0^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i \, q_0^i}$$

La ponderación (w^i_0) viene definida como la importancia relativa de un artículo en el periodo base.

El índice de Laspeyres de **precios** será:

$$L_{t/0}(P) = \sum_{i=1}^{k} w_0^i \, I_{t/0}\left(P^i \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p_0^i \, q_0^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i \, q_0^i} \; x \; \frac{p_t^i}{p_0^i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_t^i \, q_0^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i \, q_0^i}$$

Para cantidades tendremos:

$$L_{t/0}(Q) = \sum_{i=1}^{k} w_0^i \, I_{t/0}\left(Q^i \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p_0^i \, q_0^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i \, q_0^i} \; x \; \frac{q_t^i}{q_0^i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_0^i \, q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i \, q_0^i}$$

INDICES DE **PAASCHE**

En este caso, la ponderación se expresa como:

$$w_t^i = \frac{p_t^i \, q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} p_t^i \, q_t^i}$$

Este índice es aconsejable utilizarlo en el caso de que se sepa que la importancia relativa de las magnitudes cambiaron a lo largo del tiempo.

Para precios, el índice de Paasche lo calculamos como:

$$\frac{1}{P_{t/0}(P)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_t^i}{I_{t/0}(P^i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{q_t^i\ p_t^i}{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_t^i}\ x\ \frac{p_0^i}{p_t^i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_0^i}{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_t^i}$$

$$Es\ decir:\ P_{t/0}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_t^i}{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_0^i}$$

El índice de Paasche de cantidades será:

$$\frac{1}{P_{t/0}(Q)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_t^i}{I_{t/0}(Q^i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{q_t^i\ p_t^i}{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_t^i}\ x\ \frac{q_0^i}{q_t^i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_0^i\ p_t^i}{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_t^i}$$

$$Es\ decir:\ P_{t/0}(Q) = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_t^i\ p_t^i}{\sum_{i=1}^{k} q_0^i\ p_t^i}$$

INDICES DE **FISHER**

El índice de Fisher para precios vendrá dado por la siguiente expresión:

$$F_{t/0}(P^i) = \sqrt{L_{t/0}(P^i)\, P_{t/0}(P^i)}$$

Y para cantidades, tendremos la expresión:

$$F_{t/0}(Q^i) = \sqrt{L_{t/0}(Q^i)\, P_{t/0}(Q^i)}$$

Ejemplo: dada la siguiente información sobre precios y cantidades vendidas (en miles de pesetas) de determinados artículos:

BIENES	A Ñ O S					
	1987		1988		1989	
	P	Q	P	Q	P	Q
Patatas	50	150	60	140	75	135
Judias	150	430	180	450	200	460
Aceite	180	300	200	310	220	325
Pescado	1000	250	1150	270	1300	300

Determinar los índices de precios y cantidades de Laspeyres, Paasche y Fisher para 1989, con respecto al año base, 1987.

BIENES	P87 Q87	P87 Q89	P89 Q87	P89 Q89
PATATAS	7500	6750	11250	10125
JUDIAS	64500	69000	86000	92000
ACEITE	54000	58500	66000	71500
PESCADO	250000	300000	325000	390000

SUMAS	376000	434250	488250	563625

$Q_i = Q_{87}^{i} + Q_{89}^{i}$; $\qquad P_i = P_{87}^{i} + P_{89}^{i}$

BIENES	Qi	P89 Qi	P87 Qi	Pi	Q89 Pi	Q87 Pi
PATATAS	285	21375	14250	125	16875	18750
JUDIAS	890	178000	133500	350	161000	150500
ACEITE	625	137500	112500	400	130000	120000
PESCADO	550	715000	550000	2300	690000	575000
SUMAS	1051875	810250	3175	997875	864250	

$$L_{89/87}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{89}^{i}\; q_{87}^{i}}{\sum_{i=1}^{4} p_{87}^{i}\; q_{87}^{i}} = \frac{488250}{376000}\ x\ 100 = 129.85$$

$$P_{89/87}(P) = \frac{\sum_{i=1}^{4} q_{89}^{i}\; p_{89}^{i}}{\sum_{i=1}^{4} q_{89}^{i}\; p_{87}^{i}}\ x\ 100 = \frac{563625}{434250} = 129.79$$

$$F_{89/87}(P) = \sqrt{L_{89/87}(P)\, P_{89/87}(P)} = \sqrt{129.85\ x\ 129.79} = 129.82$$

$$L_{89/87}(Q) = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{87}^{i}\ q_{89}^{i}}{\sum_{i=1}^{4} p_{87}^{i}\ q_{87}^{i}} = \frac{434250}{376000}\ x\ 100 = 115.49$$

$$P_{89/87}(Q) = \frac{\sum_{i=1}^{4} q_{89}^{i}\ p_{89}^{i}}{\sum_{i=1}^{4} q_{87}^{i}\ p_{89}^{i}}\ x\ 100 = \frac{563625}{488250} = 115.44$$

$$F_{89/87}(Q) = \sqrt{L_{89/87}(Q) P_{89/87}(Q)} = \sqrt{115.49 x 115.44} = 115.4$$

V.5.- Cambio de base y enlace de seies temporales.

En el transcurso del tiempo tienen lugar cambios en los elementos que componen un número índice, cambia la producción, los hábitos de consumo, desaparecen productos de consumo habitual al mismo tiempo que aparecen otros nuevos, etc. Es decir, al cabo de cierto tiempo el conjunto de variables seleccionadas puede que haya dejado de ser representativo. En cuanto a las ponderaciones (si se eligieron los datos del año base) es posible que no se ajusten a la estructura del consumo actual.

Cuando esto sucede hay que iniciar de nuevo el proceso: renovar el índice con una nueva base.

Al modificar la base de un sistema de números índice se produce, generalmente, una ruptura en la continuidad de las series, que desde un punto de vista teórico no admite solución cuando el cambio de base realizado introduce modificaciones tanto en la cobertura y clasificación de los artículos como en sus ponderaciones. No obstante, como se necesitan series continuadas que permitan realizar predicciones y estudios sobre la evolución histórica de los números índice, todos los países al realizar un cambio de base buscan un procedimiento que permita enlazar las series con el menor deterioro posible del rigor científico.

El procedimiento de enlace generalmente aceptado es buscar un coeficiente de enlace por el cual se multiplican los índices de la base antigua para hacerlos congruentes con la nueva base. De esta forma se prolongan *hacia atrás* los índices con la nueva base. Si lo que se desea es prolongar *hacia delante* los índices de bases anteriores se usará el coeficiente como divisor de los índices correspondientes a la nueva base.

En la práctica el enlace de series de números índice se realiza:

1) Indices simples

Para realizar el cambio de base nos apoyamos en la propiedad circular:

$$I_{t/0}(H) = I_{t/t'}(H) \times I_{t'/0}\ (H)$$

Si tenemos una serie referida al periodo **0** y queremos esa misma serie referida a **t'**, estamos realizando un cambio de base del periodo **0** al periodo **t'**:

$$I_{t/t'}(H) = \frac{I_{t/0}(H)}{I_{t'/0}(H)}$$

2) <u>Indices complejos</u>, aunque no cumplen la propiedad circular, actuamos como si lo hicieran y aplicamos el mismo procedimiento que en los índices simples. Lo que hacemos es dividir el índice dado por el índice basado en el nuevo periodo con respecto al periodo base inicial:

$$I_{t/0}(H) = I_{t/t'}(H) \times I_{t'/0}(H)$$

Donde

t: es el año del cual queremos calcular el índice en una nueva base.

0: es el periodo base antiguo.

t': nuevo periodo base.

Esta propiedad nos dice que el índice del año **t** en base **0** ($I_{t/0}$), es igual al índice de ese mismo año en la nueva base ($I_{t'/t}$), multiplicado por el índice del nuevo año base en base **0** ($I_{t'/0}$). Es decir:

$$I_{t/t'}(H) = \frac{I_{t/0}(H)}{I_{t'/0}(H)}$$

El índice del año **t** en la nueva base **t'** ($I_{t/t'}(H)$) es igual al cociente entre el índice del año **t** en base **0** ($I_{t/0}$ (H)) y el índice del año **t'** en base **0** ($I_{t'/0}$ (H)).

Ejemplo: Dada la serie del Indice de Precios de Consumo (IPC) de los años 1978-1983 con base 1976 y la misma serie referida a los años 1983-1988 con base 1983. Calcular la serie homogénea de IPC de los años 1978-1988 con base 1983.

AÑOS/IPC	Base 1976	Base 1983
78	149.1	
79	172.5	
80	199.3	
81	228.4	
82	261.3	
83	293.1	100
84		110.3
85		120.0
86		130.5
87		137.4
88		144.0

$$I_{t/t'}(H) = \frac{I_{t/0}(IPC)}{I_{t'/0}(IPC)}$$

$$I_{78/83}(IPC) = \frac{I_{78/76}(IPC)}{I_{83/76}(IPC)}$$

Donde, **t**: año que queremos calcular.

t': nuevo año base (76)

0: año base antiguo (68)

AÑOS/IPC	Base 1976	Base 1983	Nueva serie IPC (base 1976 = 100)
78	149.1		$I_{78/83}$ = 50.87
79	172.5		$I_{79/83}$ = 58.85
80	199.3		$I_{80/83}$ = 68.0
81	228.4		$I_{81/83}$ = 77.9

82	261.3		$I_{82/83}$ = 89.15
83	293.1	100	$I_{83/83}$ = 100
84		110.3	
85		120.0	
86		130.5	
87		137.4	
88		144.0	

Es posible que nos interese hacer el procedimiento contrario, es decir, pasar de base 83 a base 76, en este caso haríamos:

$I_{t/76} = I_{t/83} \times I_{83/76}/100$

$I_{84/76} = I_{84/83} \times I_{83/76}/100 = (110.3 \times 293.1)/100 = 323.29$

.

.

$I_{88/76} = (I_{88/83} \times I_{83/76})/100 = (144.0 \times 293.1)/100 = 422.06$

V.6.- El problema de la deflación de series temporales.

En economía existe la necesidad de comparar el valor (precio por cantidad) de las magnitudes económicas a lo largo del tiempo. Cuando esa valoración ha sido hecha siempre a los precios del mismo periodo base (precios constantes) podemos realizar la comparación directamente. En cambio, si la valoración ha sido hecha en cada periodo al precio correspondiente al mismo (precios corrientes) no podemos realizar la comparación directamente porque la serie no es homogénea. En este caso tenemos que expresar la serie en precios constantes (referidos al mismo periodo base).

Para pasar de una serie en precios corrientes a otra en precios constantes tenemos que dividir la primera por un índice de precios y ello es lo que se conoce como DEFLACION de una serie. Al índice de precios elegido para realizar el proceso se le llama DEFLACTOR.

Dado que los índices de precios más utilizados son los de Laspeyres y Paasche, vamos a ver cómo se utilizan como deflactores.

Tenemos el valor de una magnitud en dos instantes del tiempo:

$V_0 = \Sigma^k_{i=1}\ p_0^i\ q_0^i$: valor a precios del año base.

$V_t = \Sigma^k_{i=1}\ p_t^i\ q_t^i$: valor actual, a precios corrientes.

A) Aplicando el índice de precios de Laspeyres:

$$\frac{V_t}{L(P)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_t^i q_t^i}{\frac{\sum_{i=1}^{k} p_t^i q_0^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i q_0^i}} = \sum_{i=1}^{k} p_0^i q_0^i \frac{\sum_{i=1}^{k} p_t^i q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} p_t^i q_0^i} = V_0\ x\ P(Q)$$

Al deflactar un valor por un índice de Laspeyres no pasamos de precios corrientes a constantes, sino que se obtiene la proyección temporal del valor inicial (V_0) a través de un índice cuántico de Paasche.

B) Si deflactamos por un índice de precios de Paasche tendremos:

$$\frac{V_t}{P(P)}=\frac{\sum_{i=1}^{k} p_t^i q_t^i}{\frac{\sum_{i=1}^{k} p_t^i q_t^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i q_t^i}}=\sum_{i=1}^{k} p_0^i q_t^i$$

Obtenemos la valoración de la producción actual a precios del periodo base. Por lo tanto, el índice de Paasche es el idóneo para deflactar. No obstante se pueden utilizar otros con la condición de que sea siempre el mismo.

Cuando tenemos los valores de una magnitud a precios corrientes y a precios constantes (valor de la magnitud en el año base) podemos obtener un índice de precios de dicha magnitud el cual se conoce como el **deflactor implícito** y es igual al cociente entre la magnitud a precios corrientes y a precios constantes multiplicado por cien.

Ejemplo: el valor del PIB (producto interior bruto) a precios corrientes en el año 1984 fue de 25934,4 (miles de millones), en el mismo año el PIB alcanzó un valor de 3945 (miles de millones) a precios constantes. El **deflactor del PIB** en el año 1984 es:

$$\frac{25934.4}{3945}\ x\ 100=657.4$$

EJERCICIO 1: Dados los precios y cantidades de tres artículos A, B y C desde 1986 a 1990; calcular los índices de precios y cantidades de Laspeyres, Paasche y Fisher para cada año tomando como año base 1986. Renovar los índices de Paasche tomando como año base 1988.

Años	Artículo A		Artículo B		Artículo C	
	PRECIO	CANTIDAD	PRECIO	CANTIDAD	PRECIO	CANTIDAD
1986	30	100	32	105	40	200
1987	35	105	35	100	45	210
1988	41	112	43	110	47	215
1989	45	120	45	115	50	220
1990	56	125	50	123	55	225

A) Indices de Laspeyres:

	PRECIOS	CANTIDAD
1986	100	100
1987	112.6393	102.7159
1988	125.4526	107.7994
1989	133.8788	111.9777
1990	152.1588	116.1978

B) Indices de Paasche:

	PRECIOS	CANTIDAD
1986	100	100
1987	112.7119	102.7821

1988	125.4974	107.8379
1989	134.1729	112.2237
1990	152.9726	116.8192

C) Indices de Fisher:

	PRECIOS	CANTIDAD
1986	100	100
1987	112.6756	102.749
1988	125.475	107.8187
1989	134.0258	112.1006
1990	152.5651	116.5081

D) Indice de Paasche renovado:

	1988=100	1986=100	1988=100	1986=100
1986	79.68292	100	92.73177	100
1987	89.8121	112.7119	95.31163	102.7821
1988	100	125.4974	100	107.8379
1989	106.9129	134.1729	104.067	112.2237
1990	121.893	152.9726	108.3285	116.8192

EJERCIO 2: Dada la siguiente tabla estadística sobre cantidades gastadas en lotería en una ciudad en los años que se especifican y el IPC de esos años. Expresar las citadas cantidades en pesetas constantes de 1985.

AÑOS CANTIDAD EN(PTS. CORRIENTES) IPC BASE 1983

86	1841250	120.0
86	2345168	130.5
87	2654896	137.4
88	2972154	144.0
89	3281562	153.8
90	3456917	164.1

SOLUCION:

AÑOS	IPC BASE 1985	CANTIDAD (PTS.CONSTANTES DE 1985)
85	100	1841250 = (1841250/100)*100
86	109.25	2146607 = (2345168/109.25)*100
87	114.58	2317000 = (2654896/114.58)*100
88	120.00	2476795 = (2972154/120.00)*100
89	128.17	2560386 = (3281562/128.17)*100
90	136.75	2527910 = (2356917/136.75)*100

EJERCICIO 3: Conocidos los costes de una empresa durante los años 1985 a 1990 y el IPC con base 1983 en el mismo periodo, se pide calcular los índices de coste con base 1985 en términos corrientes y constantes.

AÑOS	COSTES	IPC(1983=100)
1985	5542135	120
1986	6723086	130.5
1987	6985756	137.4
1988	7035211	144
1989	7681276	153.8
1990	8125679	164.1

SOLUCION:

AÑOS	IPC_{83}	IPC_{85}	COSTES	COSTES(CORR)	COSTES(CTE)
1985	120	100.00	5542135	100.00	100.00
1986	130.5	108.75	6723086	121.31	111.55 (1)
1987	137.4	114.50	6985756	126.05	110.09
1988	144	120.00	7035211	126.94	105.78
1989	153.8	128.17	7681276	138.60	108.14
1990	164.1	136.75	8125679	146.62	107.21 (1)

A) $IPC_{86/85} = IPC_{86/83} / IPC_{85/83} = (130.5/120)*100 = 108.75$

B) COSTES(CORR)$_{86/85}$ = (COSTES$_{86}$/COSTES$_{85}$)*100 =

(6723086/5542135)*100 = 121.31

C) COSTES(CTE)$_{86/85}$ = (COSTES(CORR)$_{86/85}$/IPC$_{86/85}$)*100 =

(121.31/108.75)*100 = 111.55

EJERCICIO 4: Se dispone de la siguiente información estadística sobre el IPC con base 1983 =100:

GRUPOS	w_i	$I_{12,91/83}$
Alimentos, bebidas y tabaco	33.03	181.1
Vestido y calzado	8.7	188.4
Vivienda	18.6	170.6
Menaje y servicios del hogar	7.4	167.3
Servicios médicos y conservación de la salud	2.4	178.2
Transportes y comunicaciones	14.4	166.5
Esparcimiento deporte y cultura	6.96	171.0
Otros gastos	8.5	205.3

Calcular:

1.-El índice general de precios de consumo correspondiente a diciembre de 1991.

SOLUCION

1.-$IPC_{12,91} = \Sigma^{8}_{i=1} I_i w_i / \Sigma^{8}_{i=1} w_i$ =

(181.1 * 33.03 + 188.4 * 8.7 + 170.6 * 18.6 + 167.3 * 7.4 +

178.2 * 2.4 + 166.5 * 14.4 + 171.0 * 6.96 + 205.3 * 8.5)/100 = 123.5436

EJERCICIO 5:

El siguiente cuadro muestra las ponderaciones de los 8 grupos de gasto del IPC (base 1983=100)

GRUPOS	PONDERACION EN%
Alimentos, bebidas y tabaco	33.03
Vestido y calzado	8.74
Vivienda	18.57
Menaje	7.41
Servicios médicos y sanitarios	2.39
Transporte y comunicaciones	14.38
Esparcimiento,enseñanza y cultura	6.96
Otros bienes y servicios	8.52

Calcular el IPC general en el periodo t suponiendo que cada grupo tiene las siguientes variaciones: 5%, 7%, 10%, 12%, 6%, 9%, 14% y 8%, respectivamente; del periodo 0 al t.

SOLUCION:

$$IPC_t/83 = \frac{\sum_{i=1}^{8} I_t^i w_{83}^i}{\sum_{i=1}^{8} w_{83}^i}$$

GRUPOS	PONDERACIONES	$INDICE_t$	$PARTICIPACION^i$
1	33.03	105	34.6815
2	8.7	107	9.309
3	18.6	110	20.46
4	7.4	112	8.288
5	2.4	106	2.544
6	14.4	109	15.696
7	6.96	114	7.9344
8	8.5	108	9.18

$IPC_{t/83}$ = 108.0929 = Suma participaciones =

$$\frac{\sum_{i=1}^{8} I_t^i w^i}{\sum_{i=1}^{8} w^i} = \frac{10809}{100}$$